

SKRIVTID: 14-19 HJÄLPMEDEL: Formelsamling (delas ut) och miniräknare.

MOTIVERA alla lösningar noggrant. För betygen 3, 4 respektive 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 p.

1 (5p). Finn med hjälp av Fouriertransformation en lösning på hela reella axeln till differentialekvationen $y''(t) - 4y(t) = \delta(t)$.

2 (7p). (a) För vilka reella värden på b är följande differentialekvation stabil?

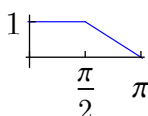
$$2y''(t) + (3 - 2b)y'(t) + (1 - b)y(t) = x(t), \quad t > 0.$$

(b) Bestäm impulssvaret i fallet när överföringsfunktionen har en dubbelpol.

3 (6p). Bestäm följderna $(y(n))_{n=0}^{\infty}$ om $y(0) = 1$ och

$$2y(n+1) = \frac{y(0)}{2^n} + \frac{y(1)}{2^{n-1}} + \frac{y(2)}{2^{n-2}} + \dots + \frac{y(n)}{2^{n-n}} + \frac{1}{2^n} - 2\frac{n}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

4 (8p). (a) Bestäm den π -periodiska Fourierserien till funktionen f i figuren nedanför



(b) Vilket värde konvergerar Fourierserien mot i origo? Motivera ditt svar!

(c) Beräkna $\sum_{n \text{ udda} \geq 1} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots$ med hjälp av Fourierserien.

(d) Betrakta nu den 2π -periodiska Fourierserien till f 's *jämna* utvidgning. Vilket värde konvergerar den här Fourierserien mot i origo? Motivera ditt svar!

(e) Vilken konvergerar snabbast? Fourierserien i (a) eller den i (d)? Motivera ditt svar!

5 (7p). (a) Härled transformparet $e^{-t}\theta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{i\omega+1}$ med hjälp av Fouriertransformens definition.

ANM. $\theta(t)$ betecknar Heavisidefunktionen $t \mapsto \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0. \end{cases}$

(b) Bestäm, för $a > 0$, Fouriertransformen av $t \mapsto \begin{cases} e^{at}, & t < 0 \\ 0, & t > 0. \end{cases}$

(c) Finn en lösning f till integralekvationen $f(x) = e^{-|x|} + \frac{1}{2}e^x \int_x^\infty f(y)e^{-y} dy$.

LEDNING: Integraltermen kan skrivas som en faltning.

6 (7p). En i bägge ändar fastsatt sträng, fri att vibrera i vertikalplanet, ges i begynnelsen en viss fart. Bestäm strängens fortsatta "öde" genom att lösa problemet nedanför.

$$u_{tt}(x, t) = 4u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \sin(\pi x) + 6\sin(3\pi x), \quad 0 < x < 1.$$