

SKRIVTID: 14-19 HJÄLPMEDEL: Formelsamling (delas ut) och miniräknare.

MOTIVERA alla lösningar noggrant. För betygen 3, 4 respektive 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 p.

- 1 (5p). Finn med hjälp av Fouriertransformation en lösning på hela reella axeln till differentialekvationen $y''(t) - 4y(t) = \delta(t)$.

LÖSNING Genom att Fouriertransformera båda leden i differentialekvationen uppstår en algebraisk ekvation (med $\hat{y}$ som obekant) som lätt kan lösas. Lösningen känns igen som Fouriertransformen av en skalad $e^{-|t|}$.

$$-\omega^2 \hat{y}(\omega) - 4 \hat{y}(\omega) = 1$$

$$\hat{y}(\omega) = -\frac{1}{\omega^2 + 4} = -\frac{1}{4} \frac{1}{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + 1} = -\frac{1}{4} \frac{1}{2} \frac{2}{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + 1} = -\frac{1}{4} \mathcal{F}(e^{-|2t|})$$

$$y(t) = -\frac{1}{4} e^{-|2t|}.$$

- 2 (7p). (a) För vilka reella värden på b är följande differentialekvation stabil?

$$2y''(t) + (3 - 2b)y'(t) + (1 - b)y(t) = x(t), \quad t > 0.$$

- (b) Bestäm impulssvaret i fallet när överföringsfunktionen har en dubbelpol.

LÖSNING (a) Stabilitet råder omm överföringsfunktionens poler ligger i vänster halvplan. Vi bestämmer överföringsfunktionen genom att Laplacetransformera differentialekvationen

$$2h''(t) + (3 - 2b)h'(t) + (1 - b)h(t) = \delta(t)$$

med begynnelsevillkor $h(0-) = 0$, $h'(0-) = 0$.

Resultatet av transformationen är (som vanligt) en algebraisk ekvation

$$(3 - 2b)sH(s) + (1 - b)H(s) + 2s^2H(s) = 1$$

vars lösning är den s.k. överföringsfunktionen

$$H(s) = -\frac{1}{(2s+1)(b-s-1)}$$

$H(s)$:s poler finns där nämnaren är noll, dvs. de är $-\frac{1}{2}$ och $b-1$.

Bägge ligger i vänster halvplan omm $b < 1$. Stabilitet råder således när $b < 1$.

- (b) Dubbelpol har vi när $b-1 = -\frac{1}{2}$, dvs. när $b = \frac{1}{2}$.

Överföringsfunktionen blir i detta fall lika med $H(s) = -\frac{1}{(2s+1)\left(\frac{1}{2}-s-1\right)} = \frac{1}{(2s-1)\left(s+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2}$.

Och impulssvaret blir $h(t) = \frac{1}{2} t e^{-\frac{t}{2}}$, $t > 0$.

3 (6p). Bestäm följden $(y(n))_{n=0}^{\infty}$ om $y(0) = 1$ och

$$2y(n+1) = \frac{y(0)}{2^n} + \frac{y(1)}{2^{n-1}} + \frac{y(2)}{2^{n-2}} + \dots + \frac{y(n)}{2^{n-n}} + \frac{1}{2^n} - 2\frac{n}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

LÖSNING Man lägger märke till att summan $\frac{y(0)}{2^n} + \frac{y(1)}{2^{n-1}} + \frac{y(2)}{2^{n-2}} + \dots + \frac{y(n)}{2^{n-n}}$ i högerledet är faltningen mellan $y(n)$ och $\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Eftersom dess $\mathcal{Z}$ -transform är lika med produkten $Y(z) \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$, leder

$\mathcal{Z}$ -transformation av den givna differensekvationen till följande algebraiska ekvation

$$2(zY(z) - z) = Y(z) \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2}$$

vars lösning visar sig vara (förvånande?) enkel

$$Y(z) = \frac{z + \frac{1}{2}}{z - \frac{1}{2}} = \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}}{z - \frac{1}{2}}$$

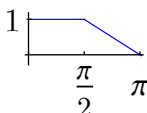
Efter inverstransformation har vi lösningen klar:

$$y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \theta(n-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^n (1 + \theta(n-1)).$$

Här är några inledande värden:

$$\left(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right)$$

4 (8p). (a) Bestäm den π -periodiska Fourierserien till funktionen f i figuren nedanför



(b) Vilket värde konvergerar Fourierserien mot i origo? Motivera ditt svar!

(c) Beräkna $\sum_{n \text{ udda} \geq 1} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots$ med hjälp av Fourierserien.

(d) Betrakta nu den 2π -periodiska Fourierserien till f 's *jämna* utvidgning. Vilket värde konvergerar den här Fourierserien mot i origo? Motivera ditt svar!

(e) Vilken konvergerar snabbast? Fourierserien i (a) eller den i (d)? Motivera ditt svar!

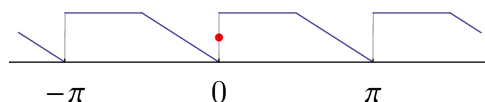
LÖSNING (a) Den efterfrågade π -periodiska Fourierseriens koefficienter c_n ges av

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t) e^{-i2nt} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 e^{-i2nt} dt + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \left(2 - \frac{2t}{\pi}\right) e^{-i2nt} dt \\ &= \frac{i \frac{1}{\pi} ((-1)^n - 1)}{2n} + \frac{\frac{1}{\pi} (-i\pi(-1)^n n + (-1)^n - 1)}{2\pi n^2} = \frac{-i\pi n + (-1)^n - 1}{2\pi^2 n^2} \\ c_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t) dt = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Fourierserien blir således

$$\frac{3}{4} + \sum_{n \neq 0} \frac{-i \pi n + (-1)^n - 1}{2 \pi^2 n^2} e^{i 2 n t} = \frac{3}{4} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2} \cos(2 n t) + \frac{1}{\pi n} \sin(2 n t) \right).$$

(b) I origo konvergerar Fourierserien enligt Dirichlets konvergenssats mot medelvärde av f :s vänster- och högergränsvärden i origo, dvs $\frac{1}{2}$, om f nu betecknar den π -periodiska utvidgningen av den givna funktionen. Se figuren nedanför.



(c) Av (a) och (b) följer likheten

$$\frac{3}{4} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2} \cos(2 n 0) + \frac{1}{\pi n} \sin(2 n 0) \right) = \frac{1}{2}$$

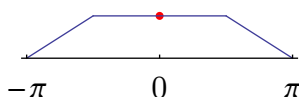
dvs.

$$\frac{3}{4} + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2} = \frac{1}{2}$$

som kan förenklas till

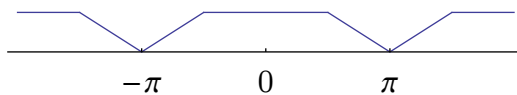
$$\sum_{n \text{ udda} \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

(d) Man kan konstatera att den jämna utvidgningen $f_{\text{jämn}}$ av f inte gör något språng i origo.



Det följer att $f_{\text{jämn}}$:s Fourierserie konvergerar (enligt Dirichlet) mot $f_{\text{jämn}}(0) = 1$.

(e) Den första seriens termer har (som vi sett) storleksordning $\frac{1}{n}$, medan den senare seriens termer har storleksordning $\frac{1}{n^2}$ eftersom $f_{\text{jämn}}$:s 2π -periodiska utvidgning är *kontinuerlig*, men har derivata som gör språng (Se nedanför). Det följer att den senare serien konvergerar snabbare.



5 (7p). (a) Härled transformparet $e^{-t} \theta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{i\omega+1}$ med hjälp av Fouriertransformens definition.

ANM. $\theta(t)$ betecknar Heavisidefunktionen $t \mapsto \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0. \end{cases}$

(b) Bestäm, för $a > 0$, Fouriertransformen av $t \mapsto \begin{cases} e^{at}, & t < 0 \\ 0, & t > 0. \end{cases}$

(c) Finn en lösning f till integralekvationen $f(x) = e^{-|x|} + \frac{1}{2} e^x \int_x^\infty f(y) e^{-y} dy$.

LEDNING: Integraltermen kan skrivas som en faltning.

LÖSNING (a) Vi beräknar Fouriertransformen av $e^{-t} \theta(t)$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} \theta(t) e^{-i\omega t} dt &= \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-i\omega t} dt = \\ \int_0^{\infty} e^{-t(1+i\omega)} dt &= -\frac{e^{-(1+i\omega)t}}{1+i\omega} \Big|_0^{\infty} = -\frac{0-1}{1+i\omega} = \frac{1}{1+i\omega} \end{aligned}$$

(b) Nu beräknar vi Fouriertransformen av $t \mapsto \begin{cases} e^{at}, & t < 0 \\ 0, & t > 0. \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{t(a-i\omega)} dt = \frac{e^{t(a-i\omega)}}{a-i\omega} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{a-i\omega}$$

Den funktion $t \mapsto \begin{cases} e^{at} & t < 0 \\ 0 & t > 0, \end{cases}$ vars Fouriertransform vi nyss beräknade, kan också ses som en

med $-a$ skalad $g(t) = e^{-t} \theta(t)$, dvs. som $g(-at) = e^{at} \theta(-at) \stackrel{a>0}{=} e^{at} \theta(-t)$. Därför skulle den nyss beräknade transformen också ha kunnat beräknats med hjälp av g 's transform och skalningsregeln:

$$g(-at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{a} \frac{1}{1-i\frac{\omega}{a}} = \frac{1}{a-i\omega}.$$

(c) Först konstaterar vi att integraltermen kan skrivas

$$\frac{1}{2} \int_x^\infty f(y) e^{x-y} dy = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty f(y) e^{x-y} \theta(y-x) dy = \frac{1}{2} (f(x) * g(-x)).$$

Fouriertransformation förvandlar därmed integralekvationen

$$f(x) = e^{-|x|} + \frac{1}{2} e^x \int_x^\infty f(y) e^{-y} dy$$

till

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2}{\omega^2+1} + \frac{1}{2} \hat{f}(\omega) \frac{1}{1-i\omega},$$

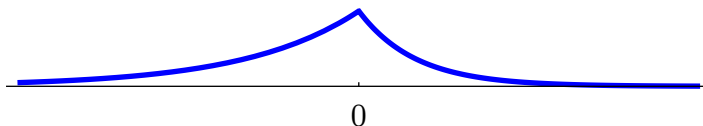
vars lösning är

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2(\omega+i)}{(\omega^2+1)(\omega+\frac{i}{2})} = \frac{4}{(\omega-i)(2\omega+i)} = \frac{4}{(i\omega+1)(-2i\omega+1)}$$

Vi partialbråksuppdelar och inverstransformerar.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{4}{3} \frac{1}{i\omega + 1} + \frac{8}{3} \frac{1}{-2i\omega + 1} = \frac{4}{3} (\hat{g}(\omega) + 2 \hat{g}(-2\omega)).$$

$$f(t) = \frac{4}{3} \left(g(t) + g\left(\frac{-t}{2}\right) \right) = \begin{cases} \frac{4}{3} e^{\frac{t}{2}}, & t < 0 \\ \frac{4}{3} e^{-t}, & t > 0 \end{cases}$$



6 (7p). En i bägge ändar fastsatt sträng, fri att vibrera i vertikalkplanet, ges i begynnelsen en viss fart. Bestäm strängens fortsatta "öde" genom att lösa problemet nedanför.

$$u_{tt}(x, t) = 4 u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \sin(\pi x) + 6 \sin(3\pi x), \quad 0 < x < 1.$$

LÖSNING Vi ansätter en *sinusserie* som är 2-periodisk i rumsriktningen.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(n\pi x)$$

Ett sådant u uppfyller RAND-villkoren $u(0, t) = u(1, t) = 0$.

När vårt u pluggas in i PDE och begynnelsevillkor förvandlas dessa till

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n''(t) \sin(n\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} -4(n\pi)^2 b_n(t) \sin(n\pi x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(0) \sin(n\pi x) = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n'(0) \sin(n\pi x) = \sin(\pi x) + 6 \sin(3\pi x)$$

Då koefficienterna identifieras erhålls en ODE med begynnelsevillkor:

$$\text{ODE } b_n''(t) = -4(n\pi)^2 b_n(t)$$

$$\text{BEG } b_n(0) = 0 \text{ alla } n, \quad b_1'(0) = 1, \quad b_3'(0) = 6, \quad b_n'(0) = 0 \text{ f.ö.}$$

Laplacetransformation av ODE:n resulterar i

$$s^2 B_n(s) = s b_n(0) + b_n'(0) - 4(n\pi)^2 B_n(s), \quad \text{dvs. } B_n(s) = \frac{b_n'(0)}{s^2 + (2n\pi)^2}$$

och när **BEG**-villkoren sätts in erhålls

$$B_1(s) = \frac{1}{s^2 + (2\pi)^2}, \quad B_3(s) = \frac{6}{s^2 + (6\pi)^2}, \quad B_n(s) = 0 \text{ f.ö.}$$

Härav,

$$b_1(t) = \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi t), \quad b_3(t) = \frac{1}{\pi} \sin(6\pi t), \quad b_n(t) = 0 \text{ f.ö.}$$

$$\text{Alltså, } u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi t) \sin(\pi x) + \frac{1}{\pi} \sin(6\pi t) \sin(3\pi x).$$

