

SKRIVTID: 8-13 HJÄLPMEDEL: Formelsamling (delas ut) och miniräknare.

MOTIVERA alla lösningar noggrant. För betygen 3, 4 respektive 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 p.

1 (5p) Lös integralekvationen $\int_0^t f(u) e^{2i(t-u)} du = \sin(2t), t \geq 0$.

LÖSNING Notera att integralen är en *faltning* $\int_0^t f(u) g(t-u) du$ med $g(t) = e^{2it}$, och att Laplacetransformen av integralen därför (se formelsamlingen) är lika med $F(s) \cdot G(s) = F(s) \cdot \frac{1}{s-2i}$. Laplacetransformation av den givna ekvationen resulterar följaktligen i ekvationen

$$\frac{F}{s-2i} = \frac{2}{s^2+4}$$

Härav,

$$F(s) = \frac{2}{s+2i}$$

Det följer att

$$f(t) = 2e^{-2it}$$

ANM. Det är relativt enkelt att evaluera den givna integralen med ovanstående f inpluggad, och därigenom verifiera att lösningen är korrekt.

2 (7p) (a) För vilka reella värden på a är följande differentialekvation stabil?

$$y''(t) + (1-2a)y'(t) - 2a y(t) = x(t), t > 0.$$

(b) Bestäm impulssvaret i fallet när överföringsfunktionen har en dubbelpol.

LÖSNING (a) Stabilitet råder omm överföringsfunktionens poler ligger i vänster halvplan. Vi bestämmer överföringsfunktionen genom att Laplacetransformera differentialekvationen

$$h''(t) + (1-2a)h'(t) - 2ah(t) = \delta(t)$$

med begynnelsevillkor $h(0-) = 0, h'(0-) = 0$.

Resultatet av transformationen blir

$$(1-2a)sH(s) - 2aH(s) + s^2H(s) = 1$$

vars lösning är överföringsfunktionen

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s-2a)}$$

$H(s)$:s poler finns där nämnaren är noll, dvs. de är -1 och $2a$.

Bägge ligger i vänster halvplan omm $a < 0$. Stabilitet råder således när $a < 0$.

(b) Vid dubbelpol är $H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+1)} = \frac{1}{(s+1)^2}$, och därmed $h(t) = te^{-t}, t > 0$.

- 3 (6p) En bank (Ebberyds) lämnar hundra procents ränta på insatta pengar. Bestäm hur mycket som skall sättas in varje år, för att resultera i en viss ackumulerad penningmängd efter n år. Närmare bestämt, lös följande ekvation m.a.p. a_n .

$$\sum_{k=0}^n a_k 2^{n-k} = 5^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

LÖSNING $\mathcal{Z}$ -transformation ger

$$A(z) \frac{z}{z-2} = \frac{z}{z-5}$$

Härav,

$$A(z) = \frac{z-2}{z-5} = \frac{z}{z-5} - 2 \frac{1}{z-5}$$

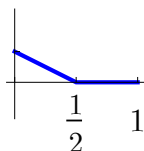
Det följer att

$$a_n = 5^n - 2 \times 5^{n-1} \theta(n-1)$$

Så här ser några inledande värden ut:

$$(1, 3, 15, \dots)$$

- 4 (8p) (a) Bestäm den 1-periodiska Fourierserien till funktionen f i figuren nedanför



- (b) Vilket värde konvergerar Fourierserien mot i origo? Motivera ditt svar!
 (c) Beräkna $\sum_{n \text{ udda} \geq 1} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots$ med hjälp av Fourierserien.
 (d) Betrakta nu den 2-periodiska Fourierserien till f 's *jämna* utvidgning, Vilket värde konvergerar den här Fourierserien mot i origo? Och vilken serie konvergerar snabbast? Den i (a) eller den i (d)? Motivera ditt svar!

LÖSNING

- (a) Den efterfrågade 1-periodiska Fourierseriens koefficienter c_n ges av

$$c_n = \int_0^1 f(t) e^{-i 2 \pi n t} dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} (1-2t) e^{-i 2 \pi n t} dt = \frac{-i \pi n - (-1)^n + 1}{8 \pi^2 n^2}$$

$$c_0 = \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{16}$$

Fourierserien blir således

$$\frac{1}{16} + \sum_{n \neq 0} \frac{-i \pi n - (-1)^n + 1}{8 \pi^2 n^2} e^{i 2 \pi n t} = \frac{1}{16} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1 - (-1)^n}{4 \pi^2 n^2} \cos(2 \pi n t) + \frac{1}{4 \pi n} \sin(2 \pi n t) \right).$$

- (b) I origo konvergerar Fourierserien enligt Dirichlets sats mot medelvärdet $\frac{1}{8}$ av vänster- och

högergränsvärdena i origo för f 's 1-periodiska utvidgning.

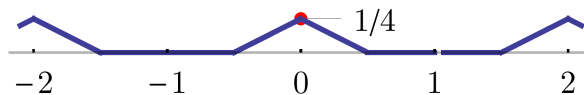


- (c) Av (a) och (b) följer likheten

$$\frac{1}{16} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1 - (-1)^n}{4\pi^2 n^2} \cos(2\pi n 0) + \frac{1}{4\pi n} \sin(2\pi n 0) \right) = \frac{1}{8}$$

dvs. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{4\pi^2 n^2} = \frac{1}{16}$, som kan förenklas till $\sum_{n \text{ udda} \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

(d) Den jämna 2-periodiska utvidgningen $f_{\text{jämn}}$ ser ut som nedan.



Enligt Dirichlet sats konvergerar $f_{\text{jämn}}$'s Fourierserie mot $\frac{1}{4}$. (Detaljerna finns i grafen ovanför.)

Vidare, eftersom $f_{\text{jämn}}$ är kontinuerlig, medan f 's 1-periodiska utvidgning har språng, kommer $f_{\text{jämn}}$'s Fourierserie att konvergera snabbare än f 's. Närmare bestämt är termerna i $f_{\text{jämn}}$'s Fourierserie av storleksordning $\frac{1}{n^2}$ medan de i f 's Fourierserie är av storleksordning $\frac{1}{n}$.

5 (7p) (a) Härled transformparet $-i(\mathcal{L}_{-2,0}(t) - \mathcal{L}_{0,2}(t)) \xLeftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{4\sin^2(\omega)}{\omega}$ både med hjälp av Fouriertransformens definition och med hjälp av regler och något känt transformpar.

ANM. $\mathcal{L}_{a,b}(t) = \begin{cases} 1 & a < t < b \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases}$

(b) Beräkna integralen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4(x)}{x^2} dx$.

LÖSNING (a) Om $f(t) = -i(\mathcal{L}_{-2,0}(t) - \mathcal{L}_{0,2}(t))$, så följer av Fouriertransformens definition att

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_0^2 i e^{-i t \omega} dt - \int_{-2}^0 i e^{-i t \omega} dt \\ &= i \frac{e^{-i 2 \omega} - 1}{-i \omega} - i \frac{1 - e^{i 2 \omega}}{-i \omega} \\ &= \frac{e^{-i 2 \omega} - 1}{-\omega} + \frac{1 - e^{i 2 \omega}}{\omega} \\ &= \frac{1}{\omega} (-e^{-i 2 \omega} + 1 + 1 - e^{i 2 \omega}) \\ &= \frac{1}{\omega} (2 - e^{-i 2 \omega} - e^{i 2 \omega}) \\ &= \frac{1}{\omega} (2 - (\cos(2 \omega) - i \sin(2 \omega)) - (\cos(2 \omega) + i \sin(2 \omega))) \\ &= \frac{1}{\omega} (2 - 2 \cos(2 \omega))^2 \\ &= \frac{4 \sin^2(\omega)}{\omega}. \end{aligned}$$

Återstår nu att härleda $\hat{f}$ med hjälp av känt transformpar och regler.

Skalningsregeln på det kända paret $\mathcal{L}_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(t) \xLeftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\sin(\frac{\omega}{2})}{\frac{\omega}{2}}$ resulterar i $\mathcal{L}_{-1,1}(t) \xLeftrightarrow{\mathcal{F}} 2 \frac{\sin(\omega)}{\omega}$.

Och t -translation en enhet till vänster resp. höger på det senare paret ger

$$\mathcal{L}_{-2,0}(t) \xLeftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-i \omega} 2 \frac{\sin(\omega)}{\omega} \quad \text{och} \quad \mathcal{L}_{0,2}(t) \xLeftrightarrow{\mathcal{F}} e^{i \omega} 2 \frac{\sin(\omega)}{\omega}.$$

Lineäritet ger till sist

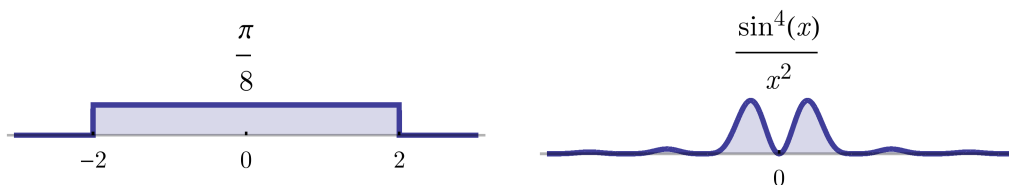
$$\begin{aligned}
-i(\chi_{[-2,0]}(t) - \chi_{[0,2]}(t)) &\xrightarrow{\mathcal{F}} -i\left(e^{i\omega} 2 \frac{\sin(\omega)}{\omega} - e^{-i\omega} 2 \frac{\sin(\omega)}{\omega}\right) \\
&\xrightarrow{\mathcal{F}} -i\left(e^{i\omega} - e^{-i\omega}\right) 2 \frac{\sin(\omega)}{\omega} \\
&= \left(\frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i}\right) 4 \frac{\sin(\omega)}{\omega} \\
&= \sin(\omega) 4 \frac{\sin(\omega)}{\omega} \\
&= 4 \frac{\sin^2(\omega)}{\omega}
\end{aligned}$$

(b) Plancherels formel tillämpad på paret

$$-\frac{i}{4}(\chi_{[-2,0]}(t) - \chi_{[0,2]}(t)) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\sin^2(\omega)}{\omega}$$

ger

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left| -\frac{i}{4}(\chi_{[-2,0]}(t) - \chi_{[0,2]}(t)) \right|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin^2(\omega)}{\omega} \right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4(\omega)}{\omega^2} d\omega,$$



Det följer att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4(x)}{x^2} dx = 4 \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$$

- 6 (7p) En tråd av längden 1 befinner sig i en skål med isvatten, något som tvingar tråden att hålla temperaturen 0. Plötsligt och blixtnabbt tar man upp hela tråden förutom ena änden som får stanna kvar i isvattnet. Den upptagna delen av tråden isoleras, förutom dess ände vilken kopplas till en värmekälla som gör att änden hålls vid konstant 20 grader fortsättningsvis. Bestäm temperaturen i trådens olika punkter fortsättningsvis, genom att lösa problemet:

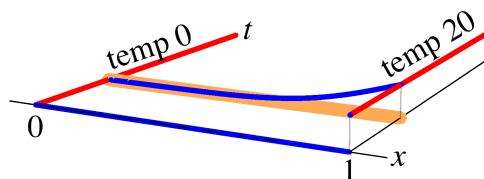
$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 20, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1.$$

LÖSNING

Vi har att göra med ett s.k. *inhomogent* problem. (Inhomogent randvillkor.)

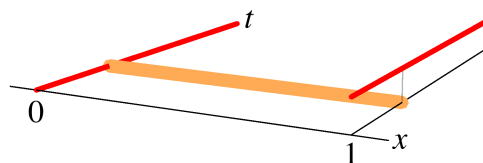


Då är lösningsstrategin att *homogenisera* problemet. Dvs. att betraktar *differensen* mellan en partikulär lösning till PDE + **RAND**-villkor och det givna problemets lösning. Randvillkoren för nämnda differens blir nämligen homogena (eller hur!).

Partikulärlösning

Eftersom de givna **RAND**-villkoren är *tidsberoende*, söker vi en partikulärlösning till differentialekvation + **RAND**-villkor som också är *tidsberoende*. Dvs. en funktion $part(x)$ sådan att

$$0 = part''(x) \\ part(0) = 0, \quad part(1) = 20$$

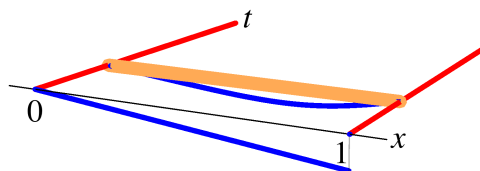


Det följer (eller hur!) att $part(x) = 20x$.

Homogen lösning

Differensen $hom(x, t) = u(x, t) - part(x)$ satisfierar

$$\begin{array}{ll} \text{PDE} & hom_t(x, t) = hom_{xx}(x, t) \\ \text{RAND}_{hom} & hom(0, t) = 0, \quad hom(1, t) = 0 \\ \text{BEG}_{hom} & hom(x, 0) = 0 - 20x \end{array}$$



RAND_{hom} leder oss till att ansätta hom som en 2-periodisk sinusserie

$$hom(x, t) = \sum_{n>0} b_n(t) \sin(n\pi x)$$

På sedvanligt sätt får vi efter spektraltransformation

$$\begin{array}{ll} \text{ODE} & b_n'(t) = -(n\pi)^2 b_n(t) \\ \text{BEG} & b_n(0) = 2 \int_0^1 (-20x) \sin(n\pi x) dx = \frac{40(-1)^n}{\pi n} \end{array}$$

vars lösning är

$$b_n(t) = \frac{40(-1)^n}{\pi n} e^{-(n\pi)^2 t}.$$

Det följer att den homogena lösningen blir

$$hom(x, t) = \sum_{n>0} \frac{40(-1)^n}{\pi n} e^{-(n\pi)^2 t} \sin(n\pi x).$$

Den slutgiltiga lösningen

Av likheten $hom(x, t) = u(x, t) - part(x)$ framgår det att

$$u(x, t) = part(x) + hom(x, t) = 20x + \sum_{n>0} \frac{40(-1)^n}{\pi n} e^{-(n\pi)^2 t} \sin(n\pi x).$$