1 Den kurviga vägen till kalkylen

Sammanfattning

Usually a history of the Calculus begins with Democritus and ends with Dedekind. In between Newton and Leibniz are of course given the attention they deserve and several of their predecessors are of course unavoidable. However there are certain steps in the evolution that are usually not fully appreciated. The present article focuses on two such aspects of the development of the calculus that are often neglected. The first is the evolution of the real number system and the second is the fact that the calculus was not the answer to the problems studied by the contemporaries of Newton and Leibniz. Instead it can be described as the right answer to the wrong question.

1.1 Det femte räknesättet

Är KALKYLEN (d. v. s. infinitesimalkalkylen) en upptäckt eller en uppfinning? Förmodligen är den både och". Som jag ser det så började det med att Newton upptäckte kalkylen och fortsatte med att Leibniz uppfann den.

För att undvika frågan kan man helt enkelt kalla den för en innovation och även om vi matematiker är medvetna om att den var betydelsefull så tror jag att inte ens vi riktigt har förstått dess betydelse. Enligt min uppfattning är det bara skriftspråket, boktryckarkonsten och möjligen datorn som haft samma betydelse för människans intellektuella utveckling som kalkylen. Att den (trots datorerna) är det absolut viktigaste i gymnasiets matematik-kurser bör också vara en självklarhet. Jag skulle önska att vi matematiklärare vore mer medvetna om vilken dyrbar gåva vi har fått att ta hand om och att förmedla till nästa generation.

Jag önskar också att vi börjar tala om de

FEM RÄKNESÄTTEN

Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division och **Derivation**.

Integration är däremot inte ett räknesätt utan en konst! Vidare bör vi hävda att den som inte kan de *fem* räknesätten varken är bildad, utbildad eller allmänbildad.

1.2 Arkimedes

Jag vill börja med att åberopa ett uttalande av den franske matematikern PIERRE LELONG som jag samtidigt tar mig friheten att förvanska något.

Enligt Lelong *borde* den största ära som kan vederfaras en matematiker vara att hans resultat uppfattas som triviala. (Det innebär ju nämligen att hans sätt att tänka eller se på det han sysslar med har blivit så allenarådande att ingen längre har fantasi att föreställa sig världen utan detta sätt att tänka.)

I kalkylens historia finns det enligt min åsikt ett flertal matematiker som vederfarits så mycket av denna ära och berömmelse att deras egen storhet kommit att ifrågasättas.

Jag kommer i detta föredrag att ge flera exempel på sådana insatser som numera uppfattas som triviala. Det första är ett arbete av antikens främste matematiker, ARKIMEDES.

Arkimedes gjorde som bekant ett flertal viktiga insatser men vad ansåg han själv vara den viktigaste? Svaret ges indirekt av det faktum att han hade önskat sig att man på hans gravsten skulle inrista en figur bestående av ett klot inskrivet i en cylinder, tillsammans med förhållandet 2:3.

Denna figur illustrerar det han bevisade i skriften *Om sfären och cylindern*, nämligen att förhållandet mellan såväl volymerna som ytorna av dessa figurer förhåller sig som 2 till 3. Detta är något som man numera lär sig i grundskolan eftersom vi har de välbekanta formlerna

$$V(K) = \frac{4\pi}{3}R^3 \text{ och } V(C) = 2\pi R^2$$

och likaså

$$A(K) = 4\pi R^2 \text{ och } A(S) = 6\pi R^2.$$

Det som gör detta så självklart för oss är att vi utan att tveka ett ögonblick använder bokstaven π i ett flertal formler. Det vi däremot inte tänker på är att formlerna faktiskt innehåller fyra olika konstanter som har det gemensamt att alla kvoter mellan dem är rationella tal. På Arkimedes tid så fanns inte talet π utan det enda man visste var att likformiga figurers areor förhåller sig som kvadraten på längderna och att deras volymer förhåller sig som kuben (på längderna). Det som Arkimedes själv betraktade som sin största insats var alltså beviset för att alla de konstanter som vi kallar för π faktiskt var ett och samma tal. (Det svåraste är att visa att klotets yta är 4 gånger cirkelns!) Detta var enligt egen min uppfattning den största enskilda insatsen av en antik matematiker.

1.3 Den vedertagna historien

Därmed vill jag återkomma till temat för detta föredrag, nämligen ”vägen till kalkylen”! När jag gick i gymnasiet så fanns det, om jag minns rätt, en fotnot i min lärobok där det sades att ”infinitesimalkalkylen uppfanns (eller möjligen upptäcktes) av NEWTON [1642-1727] och LEIBNIZ [1646-1716]. När jag för några år sedan började studera matematikens historia upptäckte jag snart att det fanns många åsikter dels om vem eller vilka som ska ha äran av själva kalkylen, dels om vilka som givit de viktigaste bidragen till upptäckten. Det finns flera utmärkta böcker som helt ägnas åt kalkylens historia och som ändå, åtminstone enligt min uppfattning, helt förbiser några oerhört viktiga steg i utvecklingen.

Några sådana böcker är

1. M. E. Baron, *The origins of the Infinitesimal Calculus*, London: Pergamon 1969.

2. C. B. Boyer, *The History of the Calculus*, New York: Dover, 1959, samt

3. C. H. Edwards, *The Historical Development of the Calculus*, New York: Springer-Verlag, 1979.

(Den sistnämnda räknar vi (i Uppsala) med att använda som huvudbok för en kurs i matematikhistoria för blivande gymnasielärare.)

De flesta sådana böcker brukar börja med pythagoréer, eleater och atomister i det antika Grekland och sluta med Dedekind och Cantor i förra århundradets Tyskland. Man brukar nämna åtminstone Demokritos, Eudoxos och Arkimedes under antiken. Därefter hoppar man i några långa skutt fram till 1600-talet där man förutom Newton och Leibniz nämner åtminstone Descartes, Fermat, Cavalieri och Barrow. Man går sedan vidare med Euler under 1700-talet, samt Cauchy, Weierstrass, Dedekind och Cantor på 1800-talet.

En viktig anledning till att utvecklingen av kalkylen inte anses avslutad förrän på 1800-talet är att att det inte är förrän Cantor och Dedekind för drygt 100 år sedan gav en riktig definition av de reella talen som det var möjligt att ge fullgoda bevis för alla satserna.

1.4 Vad är kalkylen?

Därmed uppstår åtminstone för mig frågan: Från och med när fanns kalkylen?

För att kunna ge ett svar på den frågan som åtminstone tillfredsställde mig själv var jag tvungen att definiera"vad jag menade med att kalkylen "existerade". Låt mig därför börja med denna

Definition 1.1 *Kalkylen består av "kalkylens huvudsats",*

$$\int_a^b f'(s)ds = f(b) - f(a),$$

tillsammans med nedanstående deriveringsregler.

1. $D(f+g) = Df + Dg$
2. $D(af) = aDf$
3. $D(fg) = (Df)g + f(Dg)$
4. $D(1/f) = -(Df)/f^2$
5. $D(f \circ g) = ((Df) \circ g)Dg$
6. $Dj = 1$

(där j är identitetsfunktionen $j(x) = x$).

Om vi accepterar denna definitionså innebär det först och främst att det är alldeles rätt att tillerkänna Newton och Leibniz äran av att ha upptäckt och uppfunnit kalkylen och vi kan också konstatera att Euler verkligen kunde, använde och utvecklade kalkylen, och vi kan framför allt dra slutsatsen att en formell definition av de reella talen inte var nödvändig för att kalkylen skulle kunna uppstå.

Trots detta är kalkylen otänkbar utan de reella talen och eftersom vi vet att grekerna inte ”kände tillde reella talen, så är det naturligt att fråga sig när de reella talen egentligen uppstod.[1]

Detta är för mig ett av de viktiga steg som matematikhistorikerna vanligen förbiser, och därmed vill jag återvända till det citat av Lelong där detta föredrag började, d.v.s. påståendet att

den största äran är att ens upptäckter anses triviala”.

1.5 Det decimala positionssystemet

När det gäller uppkomsten av de reella talen så finns det två viktiga matematiker som exempelvis Edwards inte ens nämner.

Den förste av dessa är

Mannen som lärde världen att räkna” – Al-Khwarizmi

De flesta som haft ens den flyktigaste kontakt med matematikhistoria har hört talas om Al-Khwarizmi [aktiv omkring år 825] och det brukar nämnas att han skrev en bok

Hisab al-jabr w'al-muqabalah

[1] Eftersom denna uppsats handlar om kalkylen tar jag mig friheten att bortse ifrån frågan om exempelvis babylonier, indier och kineser redan för tusentals år sedan hade en föreställning om att alla punkter på en linje kunde beskrivas med ett *tal*.

vars titel bland annat givit upphov till ordet *algebra*. Det brukar också påpekas att ordet *algoritm* närmast är att betrakta som en europeisk felsägning av namnet Al-Khwarizmi, och ibland nämns det att han också skrev en bok om de indiska siffror som den islamska världen då just lärt känna.

Det som få idag kan föreställa sig är en värld och en tid när man inte räknade med *skrivna* tal. En tid när skrivna tal endast användes för att dokumentera resultatet av beräkningar som gjorts med andra hjälpmedel. Det som var Al-Khwarizmis verkligt stora bidrag till mänsklighetens utveckling var insikten om att dessa nya siffror och detta nya sätt att skriva tal var så bra att t.o.m. ”vanliga människor”kunde *räkna med dem*, d.v.s. utföra beräkningar! Det Al-Khwarizmi skrev var inget mindre än världens första räknelära. Skriven för vuxna! Naturligtvis är den fullständigt trivial, men den berömmelse den åtnjöt i flera hundra år är faktiskt det bästa beviset för dess betydelse.

Även om Al-Khwarizmi enbart sysslade med hela tal och vanliga bråk så var det decimala positionssystem som han bidrog till att popularisera ett viktigt steg på vägen mot de reella talen.

1.6 Decimalbråken

Nästa steg var uppfinningen av decimalbråk. Det var en uppfinning som gjordes flera gånger, bl.a. i Kina på 200-talet (evt), i Damaskus på 900-talet och i Frankrike på 1300-talet, innan de på 1400-talet blev vanliga i den muslimska världen. De två som ska ha äran av att dels verkligen ha förstått deras användbarhet och betydelse och dels bidragit till deras spridning var den muslimske matematikern och astronomen Jemshid Al-Kashi [död 1436] och den flamländske matematikern och ingenjören Simon Stevin [1548-1620] .

Al-Kashi var verksam i Samarkand hos en sonson till den fruktansvärde erövraren Timur Lenk, och i den muslimska världen blev hans decimalbråk vanliga under 1400-talet medan det i den kristna världen dröjde ytterligare ett århundrade innan de blev mer allmänt förekommande. Trots det så var det Stevins insats som fick störst betydelse. Stevin var verksam i ett Europa där boktryckarkonsten givit upphov till en bildad elit som visserligen var liten mätt med dagens mått, men som ändå var ojämförligt mycket större än sin motsvarighet i andra samtida och tidigare kulturer. Den bok, *Tiondet*, som Stevin skrev om decimalbråken, kom ut på holländska år 1585 och redan året därpå i fransk översättning och den ledde till att decimalbråken på några decennier spreds över stora delar av Europa.

Det bör påpekas att både Stevins och al-Khwarizmis verkliga storhet inte ligger i att de skrev om egna viktiga upptäckter (eller uppfinningar) utan i att de insåg att deras sätt att räkna var så lätt att ällaskulle kunna lära sig det.

För Stevin hängde decimalbråken nära ihop med mätning och han propagerade för decimala måttsystem. Innebörden i ett sådant måttsystem är att varje längd, varje yta, varje vikt kan beskrivas av ett tal. Alla äldre måttsystem hade i någon mening haft en gräns för noggrannheten, men för decimalbråken fanns det ingen sådan gräns.

Decimalbråken, d. v. s. insikten om att varje punkt på en linje kunde tillordnas ett tal (skrivet som ett decimalbråk) var den ena komponenten i det nya talbegrepp som uppstod under årtiondena runt sekelskiftet år 1600.

1.7 De reella talen

Den andra komponenten var förmodligen ännu mer omvälvande och om, som jag antytt ovan, Stevins betydelse inte låg i att han hade uppfunnit decimalbråken utan i att han hade förstått deras betydelse, så var däremot François Viète [1540-1603], desto mer nyskapande. Viète var liksom sin landsman Fermat jurist och (som Jan Thompson påpekat för mig), så var det kanske från juridikens värld, där tänkta personer representeras av bokstäver som han hämtade idén att låta ett tänkt *tal* representeras av en bokstav.

Viète är (jämte Stevin och al-Khwarizmi) en av de jättar på vars axlar Newton kunde stå.

Därmed uppstod de reella talen (*som intuitivt begrepp!*) som en kombination av insikten om att varje sträcka kunde mätas med ett tal och möjligheten att räkna med detta tal genom att helt enkelt ersätta det med en bokstav (som representerade talet).

En tredje samtida till Stevin och Viète var John Napier [1550-1617] som med sina logaritmer återförde det tredje räknesättet (multiplikation) till det första, och kanske ännu viktigare det fjärde (division) till det andra.

Samtidigt är logaritmerna i sig ett bevis för att de reella talen då hade uppstått. Anledningen är att rationella tal har irrationella logaritmer medan rationella logaritmer representerar irrationella tal, och det är därför bara om man ser alla punkter på linjen som tal som logaritmerna blir meningsfulla.

Med dessa tre innovationer kunde 1600-talets matematiker och astronomer ta steget in i matematikens bronsålder.

1.8 Koordinatsystemet

1600-talet kallas ofta för vetenskapens (och matematikens) heroiska århundrade och det är förvisso sant att det är då som den moderna matematiken växer fram och som det nya Europa får sina första stora matematiker. De namn som oftast nämns är Kepler (som dock är mer känd som astronom), Descartes, Fermat och Pascal samt under andra halvan Newton och Leibniz, och resultatet av allas gemensamma ansträngningar är den infinitesimalkalkyl som sedan dess förändrat världen.

Något av det första som tillverkades med hjälp av de nya talen var koordinatsystemet. Detta var egentligen en gammal uppfinning, som använts redan av Appolonius 200 år fvt och senare av Oresme på 1300-talet och det åter(?)-uppstod när Descartes och Fermat studerade Appolonius verk och såg hans kägelsnitt och koordinataxlar med nya ögon. Medan Appolonius studerade kurvor i ett tomt och öde plan, där han ritade in två axlar för att beskriva sina kurvor och formulera sina samband så hade de nya koordinataxlarna en helt ny roll. Det nyss så tomma planet var plötsligt bebott av punkter med egna namn. Det var inte längre enbart punkterna på de givna kurvorna som fanns i en för övrigt tom värld, utan alla punkter kunde beskrivas med hjälp av två *reella tal*.

Tillsammans med Viètes nya symboliska matematik uppstod det något alldeles nytt. Plötsligt fick Pythagoras sats en helt ny tolkning när man kunde skriva

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$$

för att ange en cirkel. Även de ellipser som Kepler använt för att beskriva planeternas omloppsbanor runt jorden studerades med hjälp av sina algebraiska beskrivningar.

Under hela 1600-talet ägnade man sig sedan åt att rita och studera kurvor givna av algebraiska ekvationer. Man ritade asymptoter och försökte att bestämma tangenter och areor av inneslutna områden för sina nya kurvor. (En av dessa berömda kurvor är Descartes' löv givet av att $x^3 + y^3 = xy$.)

Kepler, Cavalieri, Torricelli, Fermat, Wallis och icke minst Newtons lärare Isaac Barrow beräknade ytor och volymer för både fysiska och matematiska kroppar och figurer, medan exempelvis Fermat, Descartes, Hudde, Sluse, Roberval och några till bestämde tangenter till olika kurvor.

Så småningom började sambanden mellan tangent- och area-problem klarna och det som blev det största hindret på väg mot kalkylen var att man inte visste vad man letade efter. Den erfarenhet som byggdes upp under 50 års räknande var en erfarenhet om kurvor och det den tidens matematiker sökte var metoder för att studera kurvor. Det Newton och Leibniz åstadkom var dock inte detta utan istället en kalkyl som var så kraftfull att den förändrade matematiken. Den var helt enkelt rätt svar på fel problem.

Det är därför inte förvånande att de två som (med all rätt) brukar ges äran av kalkylen egentligen inte var matematiker.

1.9 Newton

Newton var framför allt fysiker och som alla riktigt stora fysiker var han en fantastisk räknare. Det Newton hade förstått bättre än någon före honom (och förmodligen också bättre än de flesta efterföljare) var begreppet *momentan hastighet*. Detta var ett begrepp som låg långt bortom grekernas vetenskapliga horisont. Under medeltiden hade skolastiska tänkare som Jean Buridan upptäckt tröghetsom fysikaliskt begrepp och infört benämningen *impetus*. Det var dock först med Galilei och Kepler som den momenta hastigheten kunde om inte mätas så åtminstone beräknas.[1] För Newton tycks momentan hastighet ha varit något fullständigt självklart och han upptäckte och använde kalkylen som ett hjälpmedel för sitt räknande. Ett annat hjälpmedel, som han också uppfann, var potensserierna.

Newton tycks ha varit oerhört misstänksam och angreppen mot Leibniz för att ha stulit hans idéer är ju väl kända. Förmodligen var han så långt före sin tid och så överlägsen sin omgivning att ingen förstod honom och han vande sig vid att allt vad han presenterade missförstods och vantolkades.[2] Han vande sig därför vid att uppfatta sin omgivning som förstockad och obegåvad. Detta ledde sedan vidare till föreställningen att inga andra hade egna idéer så att när Leibniz presenterade tankar som liknade hans egna så måste han ha stulit idén.

Om vi ser honom på detta sätt så fanns det ju heller ingen anledning för honom att göra sin kalkyl lätt att förstå eller räkna med. Han visste ju vad han gjorde och andra skulle ändå inte förstå. Det som är väl känt är ju däremot att de engelska matematikernas fasthållande vid Newtons kalkylggjorde att England hamnade helt utanför den vetenskapliga utvecklingen i nästan 150 år.

1.10 Leibniz

Leibniz var inte heller matematiker varken till utbildning eller profession. Han var utbildad jurist och anställd som diplomat hos kurfurstan av Mainz när han vid 26 års ålder kom till Paris år 1672. Där lärde han känna Huyghens som var den tidens ledande fysiker och matematiker. Av honom fick han lära sig något om den moderna matematik som då studerades i Paris och han fick också några olösta problem att fundera över. Efter att ha löst några av dessa ingick han i kretsen.

Redan innan han kom till Paris hade han f.ö. i samband med att han skrev sin doktorsavhandling (i juridik) drömt om att skapa ett sätt att kunna

[1] Det kan vara värt att notera att momentan hastighet faktiskt inte är mätbar.

[2] Det var kanske detsamma som Gauss råkade ut för.

avgöra exempelvis juridiska dispyter genom att helt enkelt räkna ut"vem som hade rätt. Detta innebär att även om han inte kände till den moderna matematikenså var han duktig på att räkna. Som vi alla vet var han också *filosof*, vad som nu menas med det.

Det Leibniz började fundera över var *den karakteristiska triangeln*, den där med sidorna Δx, Δy och en sekant och det han försökte att förstå var vad som hände med den när sidorna blev oändligt små, eller egentligen $1/\infty$, d.v.s. infinitesimalt små. Han betecknade dessa infinitesimaler med dx och dy och försökte att komma underfund om hur han skulle räkna med dem. Det tog honom några år men resultatet blev som vi alla vet ganska lyckat.

Han kom på hur han skulle addera dem till den summa som vi nu kallar en integral och hur han skulle multiplicera dem och icke minst dividera dem med varandra. Därmed kunde han formulera huvudsatsen och deriveringsreglerna.

Dessutom, och det är egentligen vad titeln på detta föredrag anspelar på, så insåg han värdet av det han hade hittat. Han uppfann en kalkyl för att räkna med funktioner (trots att dessa inte fanns och trots att det var kalkylen som skapade funktionsbegreppet och inte tvärtom) och som var till viss hjälp för att studera de kurvor, som hans samtida studerade. Den löste inte alla problem, men den var mer än bara en generell metod.

Han försökte också att motivera sin kalkyl och kanske var det i detta sammanhang en fördel att han var filosof snarare än matematiker. I pedagogiska diskussioner brukar jag hävda att bevis är till för att övertyga tvivlareöch det var väl det som både Newton (i någon mån) och Leibniz fick ägna sig åt. Som vi vet så behövs en logiskt stringent beskrivning av de reella talen för att ge matematiskt stringenta bevis för kalkylen så att med den tidens begrepp gick det inte. För att övertyga tvivlarna var Newton och Leibniz därför tvungna att visa hur deras nya metoder kunde användas för att lösa svåra matematiska och fysikaliska problem.

Trots att det alltså dröjde nästan två sekel innan kalkylen fått ett fundament som även dagens matematiker accepterar, så innebar den inledningen till en ny era inom matematik och fysik och via fysiken för naturvetenskapen, tekniken och oss.