NÅGRA "NYA" ORTOGONALA POLYNOM

STEN KAIJSER

1. Inledning

$$\begin{array}{llllll}
1, & x, & x^2-\frac{1}{3}, & x^3-\frac{3}{5}x, & x^4-\frac{6}{7}x^2+\frac{3}{35}, & \ldots \\
1, & x, & 2x^2-1, & 4x^3-3x, & 8x^4-4x^2-1, & \ldots \\
1, & x, & x^2-1, & x^3-3x, & x^4-6x^2+3, & \ldots \\
1, & x, & x^2-1, & x^3-5x, & x^4-14x^2+9, & \ldots \\
1, & x, & x^2, & x^3-2x, & x^4-8x^2, & \ldots
\end{array}$$

$$1,\ x-1,\ x^2-4x+2,\ x^3-9x^2+18x-6,\ x^4-16x^3+72x^2-96x+24,\ldots$$

Vad är detta? Eftersom det kan sägas tillhöra matematisk allmänbildning att känna till de "klassiska systemen" av ortogonala polynom, d.v.s. Legendre-, Tchebycheff-, Laguerre- och Hermite-polynomen, så är det säkert många som känner igen de tre första raderna och även den som inte minns dem kanske gissar att det handlar om ortogonala polynom. Eftersom de fem första innehåller omväxlande jämna och udda polynom, så bör de vara ortogonala med avseende på jämna viktsfunktioner, medan den sista raden kan antas innehålla (de första) Laguerre-polynomen, som ju är ortogonala med avseende på vikten e^{-x}.

Men varifrån kommer då den fjärde och den femte raden? En naturlig gissning skulle kunna vara att eftersom alla de andra utgör början på välkända system av ortogonala polynom så skulle de två sista kunna vara mindre välkända system. Tanken låter bra, men det är något med den femte följden som inte stämmer - kan x^2 verkligen vara ortogonalt mot 1 med avseende på någon inre produkt som ges av en integral? Svaret på den frågan är uppenbart *nej* om man tar en integral längs den reella axeln, men det kommer att visa sig att svaret är *ja* om vi tillåter integraler i det komplexa planet. Den här uppsatsen handlar om de två sista systemen, som tillhör klassen av Meixner-Pollaczek polynom. Som en förberedelse vill jag dock gärna börja med att friska upp kanske halvt bortglömda kunskaper om de klassiska systemen.

2. De klassiska systemen

De klassiska systemen är alla andvändbara, fastän kanske på lite olika sätt. Legendre-polynomen är kanske de naturligaste, eftersom den inre produkt som används är den enklast möjliga, nämligen

$$(f|g) = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

Date: 23 december 2004.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary: XX ; Secondary: YY .

Key words and phrases. Orthogonal polynomials, combinatorics, complex analysis.

(varvid konjugeringen är onödig om vi håller oss till reella funktioner). Det enda som är en aning förvånande är att de främst används i 3-dimensionella problem. Detta är dock sant och ger också ett spännande samband med Tchebycheff-polynomen. Anledningen är nämligen att om vi på enhetsklotet i $\mathbb{R}^3$ studerar de funktioner som bara beror av en variabel, förslagsvis z och (enligt Gram-Schmidts metod) vill ortogonalisera polynomen med avseende på yt-måttet på sfären, så får vi exakt Legendre-polynomen. Detta beror på den välkända egenskapen (i $\mathbb{R}^3$) att arean (på sfären) mellan två parallella snitt (m.a.o. zonens area) bara beror på avståndet mellan snitten. Från Legendre-polynomen kan man också erhålla homogena harmoniska polynom genom att ersätta alla 1:or med de potenser av $x^2+y^2+z^2$ som gör polynomen homogena.

Samma synsätt kan användas också för att tolka Tchebycheff-polynomen, vilket i det fallet ger ett nära samband med de trigonometriska funktionerna, något som också syns i den välkända formeln

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Dessa erhålls genom ortogonalisering av följden $\{1, x, x^2, \dots\}$ med avseende på den inre produkten

$$(f|g) = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\, \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Laguerre-polynomen får vi om vi istället ortogonaliserar med avseende på den inre produkten

$$(f|g) = \int_{0}^{\infty} f(x)\overline{g(x)} e^{-x}\, dx.$$

De har ett naturligt samband med Γ-fördelningarna i matematisk statistik.

För att erhålla den sista familjen, Hermite-polynomen, ska man som bekant ortogonalisera med avseende på "normalfördelningen". Eftersom denna är lika naturlig i alla dimensioner så finns det också Hermite-polynom i alla dimensioner, t.o.m. i oändligt många dimensioner, vilket ger det som brukar kallas för Wiener-kaos.

Alla dessa klassiska system av ortogonala polynom har genererande funktioner och kan erhållas med hjälp av välkända Rodrigues-formler. Alla är också egenfunktioner för någon andra ordningens differential-operator.

Hösten 1998 blev jag i några olika sammanhang påmind om att funktionen $1/\cosh x$ "nästan" är sin egen Fourier-transform, eftersom

$$\frac{\pi}{2\cosh\frac{\pi t}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixt}}{\cosh x}\, dx.$$

Eftersom detta innebär att alla moment av funktionen, d.v.s. integralerna

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \frac{dx}{\cosh x}$$

kan beräknas som värdet i origo av en derivata av samma funktion, så insåg jag att det var möjligt att explicit beräkna de ortogonala polynomen med avseende på viktsfunktionen $1/\cosh x$.

Den enda anledningen till att inte göra det var att de förmodligen var kända, men efter att ha letat i några välkända böcker utan att hitta dem så bestämde jag mig för att räkna ut dem. När jag väl fått fram dem så vände jag mig till några ledande experter på ortogonala polynom och fick därigenom veta dels att de var kända, vilket jag väl innerst inne anade, och dels vad de brukade kallas, nämligen Meixner-Pollaczek-polynom [3],[4]. Trots att de alltså är kända så tror jag att de ändå är värda ett närmare studium. Anledningen till detta är att Meixner-Pollaczek-polynomen (i fortsättningen M-P-polynomen), som de flesta system av ortogonala polynom, ingår i en större familj och inom denna bestäms av en eller flera parametrar, medan "mina polynom" som jag hoppas framgår av det följande "står för sig själva".

3. Egenskaper hos system av ortogonala polynom

Eftersom alla de klassiska polynomen är nära förbundna med någon differentialoperator så gjorde jag ett litet försök att ta reda på om det kan finnas någon sådan även med anknytning till mina polynom. Jag upptäckte snabbt att det fanns det inte och anledningen är helt enkelt att någon sådan inte kan finnas om inte viktsfunktionen (på intervallet $[a, b]$)är av formen

$$\omega(x) = c(x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}$$

eller kan erhållas ur en följd sådana genom en lämplig gränsövergång såsom exempelvis

$$\omega(x) = e^{-x} = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{x}{n})^n$$

eller

$$\omega(x) = e^{-x^2} = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{x^2}{n^2})^{n^2}.$$

Även om många vanligt förekommande viktsfunktioner är av denna form så innebär det ändå att det nära sambandet med en differentialoperator är en viktig anledning till att vissa polynom blivit klassiska.

En annan viktig egenskap hos de klassiska polynomen är att de uppfyller en enkel rekursionsformel. Detta gäller också för exempelvis M-P-polynomen. Enkelheten hos dessa rekursionsformler innebär också att det går att räkna ut en genererande funktion för dem.

Det som är sant är att om vi ortogonaliserar följden $\{1, x, x^2, \dots\}$ med avseende på en positiv vikt på ett (begränsat eller obegränsat) intervall (a, b) så gäller alltid att det finns tal (A_n, B_n) så att (om vi inte normaliserar utan låter koefficienten för den högsta potensen vara 1)

$$p_{n+1}(x) = (x - A_n)p_n(x) - B_n p_{n-1}(x).$$

Anledningen till detta är att polynomet $xp_n(x)$ automatiskt är ortogonalt mot alla polynom av grad högst $n-2$, (vi kan ju flytta faktorn x till det andra polynomet som då får grad högst $n-1$) så att det enda vi behöver göra är att succesivt räkna ut normerna av alla nya p_n samt de inre produkterna $(x^{n+1}|p_n(x))$. I de fall där viktsfunktionen är en jämn funktion blir problemet dessutom ännu lättare eftersom vartannat polynom då blir jämnt medan vartannat blir udda. Vi behöver därför endast räkna ut B_n i ovanstående rekursion.

4. M-P-polynomen

När jag väl bestämt mig för att räkna ut de ortogonala polynomen med avseende på vikten $\frac{1}{\cosh x}$ visade det sig vara lättare sagt än gjort. Med visst besvär räknade jag ut de första 5 momenten (varav 2 var noll) och kunde därmed räkna ut de första tre polynomen. Jag upptäckte också att det gällde att välja en lämplig "normalisering" av viktsfunktionen. Ett tag försökte jag att välja den så att den verkligen skulle vara sin egen fouriertransform, men så småningom visade det sig att om jag satte vikten till $\omega(x) = 1/(2\cosh\frac{\pi x}{2})$ så blev åtminstone alla moment heltal.

Min tanke var nu att räkna ut några stycken för att se om det gick att gissa en rekursion och det gick faktiskt. Dessutom blev rekursionsformeln enklare och vackrare än vad jag någonsin kunnat föreställa mig. Det som ledde mig på vägen var att den metod man använder för att räkna ut fouriertransformen faktiskt innehåller mycket mer. Låt oss alltså räkna ut den. Vi har

$$\hat{\omega}(t) = \mathcal{F}(\omega(x))(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}\omega(x)\,dx$$

vilket vi räknar ut med residykalkyl. Vi integrerar därför $\omega(z)$ runt rektangeln $(-R, R, R+2i, -R+2i)$ och låter sedan R gå mot oändligheten. Detta ger att

$$I = (1+e^{2t})\hat{\omega}(t) = 2\pi i \frac{e^t}{\pi i}$$

vilket visar att $\hat{\omega}(t) = 1/\cosh t$, något som onekligen tydde på att valet av normalisering var riktigt. Dessutom blev det nu möjligt att beräkna succesiva moment genom att helt enkelt invertera MacLaurin-serien för $\cosh t$, något som är en naturlig uppgift för ett matematik-program som Maple eller Mathematica.

Viktigare var dock att jag med exakt samma metod kunde räkna ut momenten med residykalkyl. För att få lättare räkningar flyttade jag sedan ner rektangeln så att den låg symmetriskt runt reella axeln. Så småningom insåg jag också att vad mina residyintegraler i själva verket utnyttjade var att funktionen $1/(4i\sinh\frac{\pi x}{2})$ är Poisson-kärnan för 0 i det band av bredd 2 som ligger symmetriskt med avseende på reella axeln.

Sedan räknade jag ut ungefär 8 polynom och redan efter det fjärde så fanns det en naturlig gissning för hur en rekursion kunde se ut. Därmed kunde jag vända på problemet och helt enkelt anta att de polynom som erhölls med rekursionen var de polynom jag sökte, och för att visa det beräknade jag en genererande funktion för polynomen.

Det gällde alltså att visa följande

Sats 4.1. *Låt systemet $\{\tau_k\}_{k=0}^{\infty}$ vara givet av följande rekursion.*

$$\tau_{-1} = 0,\ \tau_0 = 1,\ \textit{och}\ \tau_{k+1}(x) = x\tau_k(x) - k^2\tau_{k-1}(x). \tag{1}$$

Då gäller följande:
(i) Funktionen τ_k är ett polynom av grad k där koefficienten för den högsta potensen av x är 1 (ett moniskt polynom);
(ii) Polynomen $\{(k!)^{-1}\tau_k\}_{k=0}^{\infty}$ är ortonormerade i Hilbertrummet $L^2(\omega)$;
(iii) Den exponentiellt genererande funktionen $G_\tau(x,s) = \sum \frac{\tau_k(x)}{k!}s^k$ är funktionen

$$G(x,s) = G_\tau(x,s) = \frac{e^{x\arctan s}}{\sqrt{1+s^2}}. \tag{2}$$

Bevis. Eftersom (i) är uppenbart ur rekursionen så börjar vi med (iii). För att få den exponentiellt genererande funktionen så multiplicerar vi varje ekvation med $s^k/k!$ och adderar den oändliga serien vilket ger

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\tau_{k+1}(x) - x\tau_k(x) + k^2\tau_{k-1}(x))\frac{s^k}{k!} = 0 \tag{3}$$

som i sin tur ger differentialekvationen

$$\frac{\partial G(x,s)}{\partial s} - xG(x,s) + sG(x,s) + s^2\frac{\partial G(x,s)}{\partial s} = 0. \tag{4}$$

Eftersom detta är en linjär ekvation av första ordningen så löser vi den genom att multiplicera med den integrerande faktorn $\sqrt{1+s^2}e^{-x\arctan s}$. Utnyttjar vi dessutom att $G_\tau(0,0) = 1$ så följer (iii).

Nästa steg är att visa att polynomen $\tau_n(x)/n!$ är ortonormerade med avseende på den inre produkten

$$(f|g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\omega(x)\,dx$$

För att göra det ska vi helt enkelt visa att

$$I(s,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_\tau(x,s)G_\tau(x,t)\omega(x)\,dx = \frac{1}{1-st}. \tag{5}$$

För att beräkna denna integral sätter vi $\alpha = \arctan s$ och $\beta = \arctan t$, vilket med kända trigonometriska formler ger att

$$I(s,t) = \cos\alpha\cos\beta\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha+\beta}\omega(x)\,dx$$

och eftersom detta är samma integral som vi beräknade för att bestämma fouriertransformen av ω så kan vi utnyttja den räkningen för att se att

$$I(s,t) = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{1}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \frac{1}{1-st}.$$

Detta visar att polynomen $\tilde{\tau}_n(x) = \tau_n(x)/n!$ är ortonormerade, vilket också innebär att den gissade rekursionsformeln gäller för alla naturliga tal. $\square$

Anmärkning 1. Det är värt att notera att $\tau_n(i) = i^n n!$ och att $\tau_n(0) = 0$ om n är udda $= ((2k-1)!!)^2$ om $n = 2k$.

5. Ett besläktat system

Den egenskap hos viktsfunktionen $\omega(x)$ som gjorde det möjligt att beräkna de nödvändiga integralerna är att den är en del av en Poissonkärna, vilket framgår av följande

Proposition 5.1. *Låt funktionen f vara kontinuerlig och harmonisk i bandet $S = -1 \le Im(z) \le 1$ och antag dessutom att $|f(z)| < Ce^{a|z|}$ för något a, $0 \le a < \frac{\pi}{2}$. Då är*

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+i)+f(x-i)}{2}\omega(x)\,dx. \tag{6}$$

Bevis. Vi skriver $f = g + \bar{h}$ där g och h är analytiska. För att beräkna integralen med g använder vi residykalkyl som tidigare, och för att beräkna integralen med h så noterar vi att eftersom funktionen ω är reell (över integrationskurvorna) så kan vi sätta konjugeringen utanför integralen, vilket gör att vi åter kan använda residykalkyl. $\square$

Medan jag räknade för att bestämma polynomen τ_n så växte det också fram ett annat system av polynom som jag så småningom insåg vara ortogonala med avseende på Poissonkärnan $\mathcal{P}$ för bandet. Dessa polynom beskrivs i följande

Sats 5.1. *Låt systemet* $\{\sigma_k\}_{k=0}^{\infty}$ *vara givet av följande rekursion.*

$$\sigma_{-1} = 0,\ \sigma_0 = 1,\ \textit{och}\ \sigma_{k+1}(x) = x\sigma_k(x) - k(k-1)\sigma_{k-1}(x). \tag{7}$$

Då gäller följande:
(i) Funktionen σ_k *är ett moniskt polynom av grad* k*;*
(ii) Polynomen $\{(k!)^{-1}\sigma_k\}_{k=0}^{\infty}$ *är ortogonala i Hilbertrummet* $H^2(S,\mathcal{P})$*;*
(iii) Vidare har σ_0 *normen 1 medan de övriga har normen* $\sqrt{2}$*;*
(iv) Den exponentiellt genererande funktionen $G_\sigma(z,s) = \sum \frac{\sigma_k(z)}{k!}s^k$ *är funktionen*

$$G_\sigma(z,s) = e^{z \arctan s} \tag{8}$$

Bevis. Beviset är väsentligen detsamma som för det föregående systemet. Det är något lättare att lösa differentialekvationen men den slutliga integralen blir i gengäld något svårare att tolka.

Vi börjar med att addera rekursionen vilket ger

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\sigma_{k+1}(z) - x\sigma_k(z) + k(k-1)\sigma_{k-1}(z))\frac{s^k}{k!} = 0 \tag{9}$$

vilket i sin tur ger differentialekvationen

$$G'_\sigma(z,s) - xG_\sigma(z,s) + s^2 G'_\sigma(z,s) = 0 \tag{10}$$

Löser vi differentialekvationen så får vi (iv). (ii) och (iii) följer direkt av följande integral

$$\int_{\partial S} G_\sigma(z,s)G_\sigma(z,t)\,d\mathcal{P}(z) = \frac{1+st}{1-st}, \tag{11}$$

som beräknas på samma sätt som motsvarande integral för τ-systemet. □

6. Några samband mellan systemen

Det finns ett flertal samband mellan systemen som gör det naturligt att behandla dem tillsammans. Dessa samband beskrivs enklast med hjälp av följande tre enkla linjära operatorer, som alla är väldefinierade åtminstone på mängden av polynom, och därmed på en tät delmängd av $L^2(\omega)$.

$$Rf(x) = \frac{1}{2}(f(x+i) + f(x-i)) \tag{12}$$

$$Jf(x) = \frac{1}{2i}(f(x+i) - f(x-i)) \tag{13}$$

$$Qf(x) = xf(x) \tag{14}$$

Benämningarna på operatorerna har att göra med att R är ett slags "realdel", J är en "imaginärdel", medan benämningen Q för den tredje är inspirerad av kvantmekanik. Att denna analogi är naturlig framgår av följande (lätt bevisade) samband mellan operatorerna.

Proposition 6.1. *Följande samband mellan operatorerna* R, J *och* Q *gäller:*

$$RQ - QR = -J \tag{15}$$

$$JQ - QJ = R \tag{16}$$

$$RJ - JR = 0 \tag{17}$$

$$R^2 + J^2 = I \tag{18}$$

där I är identitetsoperatorn.

I termer av dessa operatorer kan vi nu bevisa följande

Sats 6.1. *För polynomen $\{\tau_k\}$ och $\{\sigma_k\}$ gäller:*

$$R\sigma_k = \tau_k \tag{19}$$

$$QR\tau_k = \sigma_{k+1} \tag{20}$$

$$J\sigma_k = k\tau_{k-1} \tag{21}$$

$$QJ\tau_k = k\sigma_k \tag{22}$$

Bevis. Alla dessa samband bevisas med induktion. De är alla triviala för $k = 0$, och som ett exempel på hur induktionen fortsätter så bevisar jag den första relationen. Vi antar därför att alla samband gäller fram t.o.m. n så att vi vet att $R\sigma_n = \tau_n$ (och att $J\sigma_n = n\tau_{n-1}$) och vill bevisa att de också gäller för $n + 1$.

$$R\sigma_{n+1}(x) = R(x\sigma_n(x) - n(n-1)\sigma_{n-1}(x)) \tag{23}$$

$$= \frac{(x+i)\sigma_n(x+i) + (x-i)\sigma_n(x-i)}{2} - n(n-1)R\sigma_{n-1}(x) \tag{24}$$

$$= xR\sigma_n(x) - J\sigma_n(x) - n(n-1)R\sigma_{n-1}(x) \tag{25}$$

$$= x\tau_n(x) - n\tau_{n-1}(x) - n(n-1)\tau_{n-1}(x) \tag{26}$$

$$= x\tau_n(x) - n^2\tau_{n-1}(x) = \tau_{n+1}(x) \tag{27}$$

och detta bevisar att den första relationen gäller. De övriga bevisas på samma sätt. □

Med hjälp av dessa operatorer kan vi definiera andra som bland annat kan användas för att generera systemen.

Sats 6.2. *Låt operatorerna S, T, A, B och C vara givna på följande sätt:*
(1) $S = QRR$, $T = RQR$, $A = JQR$, $B = RQJ$ and $C = QJR$.
Då gäller följande samband:

$$S^k(\sigma_0) = \sigma_k \tag{28}$$

$$T^k(\tau_0) = \tau_k \tag{29}$$

$$A(\tau_k) = (k+1)\tau_k \tag{30}$$

$$B(\tau_k) = k\tau_k \tag{31}$$

$$C(\sigma_k) = k\sigma_k \tag{32}$$

Alla dessa samband följer direkt av föregående sats.

7. Användning

Jag vill avsluta denna uppsats med att något diskutera frågan om dessa system kan ha någon användning i en tid när numeriska metoder och småvågor (wavelets) blir alltmer dominerande. Det som då främst talar emot dem är att de inte är välkända, och det som talar för dem är främst deras anmärkningsvärda enkelhet.

Användbarheten av ett ortogonalsystem beror till stor del av om det går att explicit beräkna koefficienterna i serieutvecklingen av givna funktioner. För de system som presenterats i denna uppsats så kan de integraler som ger koefficienterna ofta tolkas som Poisson-integraler, vilket gör möjligt att faktiskt räkna ut koefficienterna.

Jag vill i detta sammanhang nämna att även om jag när jag letade efter dem skulle ha hittat dem i någon av de böcker, exempelvis [1] eller [2] där de faktiskt är omnämnda så är det inte säkert att jag skulle ha känt igen dem. Anledningen är att viktsfunktionen för Meixner-Pollaczek polynomen med parametern λ beskrivs som $|\Gamma(\lambda + ix)|^2$ (där Γ är Eulers Γ-funktion) och det är inte helt självklart att jag skulle ha insett att för $\lambda = \frac{1}{2}$ så är detta samma sak som $1/\cosh \pi x$. Det är ur standardformen på polynomen inte heller uppenbart att de i sin icke normerade moniska form verkligen har heltals-koefficienter.

Den mest iögonenfallande egenskapen hos de två systemen är ju nämligen detta att de i sin moniska form har heltalskoefficienter, medan normerna är $n!$ (resp. $\sqrt{2}n!$) och eftersom denna egenskap inte kan gälla för alla system som beror kontinuerligt av en parameter, så innebär det att systemen $\{\tau_n\}$ (och $\{\sigma_n\}$ förtjänar att studeras för sig själva och inte enbart som del av en större familj.

Det andra systemet $\{\sigma_n\}$ förefaller på sätt och vis vara intressantare. Först och främst så är det inte ett system av ortogonala polynom (i strikt mening) eftersom viktsfunktionen inte är ett mått på reella axeln, utan är istället en bas för de analytiska funktionerna i bandet $S = \{z \mid -1 < \Im(z) < 1\}$. Det som förmodligen minskar deras intresse är att det naturliga sättet att representera funktioner i bandet är som Fourier-integraler (Paley-Wiener teori), men eftersom funktioner definierade i ett band är oerhört viktiga i många sammanhang, så bör alla "naturliga" sätt att presentera dem vara välkomna. Systemet kan f.ö. kompletteras med de konjugerade funktionerna $\sigma_n^*(x) = \bar{\sigma}_n(x)$ och utgör då en ortogonal bas för de harmoniska funktionerna i bandet.

Det kan också nämnas att momenten $\mu_n = \mu_n(\frac{\pi}{2})$ har intresse i kombinatorik. De kallas för Bernoulli-tal och de första är 1,0,1,0,5,0,61,0,1385,... . Det gäller också att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n(2n-1)\mu_{2n-2}}{\mu_{2n}} = \frac{\pi^2}{4}$$

Som en sista kommentar vill jag dels påpeka att jag i denna uppsats inte diskuterar fullständigheten hos systemen, dels erkänna att det inte var jag som insåg hur ortogonaliteten skulle bevisas. Jag hade använt den genererande funktionen för att beräkna normen hos polynomen, men det var Svante Janson som påpekade för mig att den också kunde användas för att bevisa ortogonaliteten.

Avslutningsbevis vill jag nämna att fullständiga bevis för alla satser finns i en rapport från matematiska institutionen vid Uppsala Universitet författad av Tsehaye Kahsu Araaya.

Referenser

[1] R. Askey and J. Wilson, *Some Basic Hypergeometric Orthogonal Polynomials that generalize Jacobi Polynomials*, Memoirs Amer. Math. Soc. v.54, no.319 (1985)
[2] T. H. Koornwinder, *Meixner-Pollaczek polynomials and the Heisenberg Algebra*, J. Math. Phys. **30**(4), April 1989
[3] J. Meixner, , J. London Math. Soc. **9**, 6 (1934)
[4] F. Pollaczek, C.R. **230**,1563 (1950)
[5] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 23, fourth ed. (1975)

Matematiska Institutionen, Uppsala Universitet, Box 480, SE-751 06 Uppsala, Sverige
E-mail address: sten.kaijser@@math.uu.se