

Svar och vinkar till kombinatorikproblemen

2.

- a) antalet strängar är 3^{13} . (Multiplikationsprincipen.)
- b) antalet är $\binom{13}{2} \cdot 2^{11}$. (Binomialtalet anger på hur många sätt de två ettorna kan placeras ut. Därefter har vi bara två möjligheter i de övriga elva positionerna.)
- c) Antalet är $3^{13} - (2^{13} + 13 \cdot 2^{12})$. (Detta svarar mot att vi drar bort antalet strängar med ingen eller exakt en etta.)

3.

- i) 3^{n+1} strängar är palindromer. (De första $n+1$ bokstäverna kan väljas fritt varefter resten är bestämda av palindromvillkoret.)
- ii) Antalet blir $\binom{n}{2} \cdot 2^{n-2}$. (Vi måste ha ett a i mitten. De andra kan placeras ut med två i varje hälft.)

4. 480 ord. (Svaret kan skrivas

$$480 = \binom{4}{2} \cdot 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3,$$

där den första termen ger antalet "ord" med två A - de kan ju placeras ut på $\binom{4}{2}$ olika sätt - den andra antalet ord med högst ett A.)

5. På 28 sätt. (Detta är ett "urval med repetition"-problem. Korvarna plus två streck kan placeras ut i sammanlagt 8 positioner. Om vi väljer två av dessa och sätter strecken där så har vi gjort ett val och detta kan alltså ske på $\binom{8}{2}$ olika sätt.)

6. På $\binom{52}{20} = \binom{52}{32}$ sätt. (Den första varianten svarar emot att vi först konstaterar på vilka platser i den resulterande bunten med 52 kort, korten i den ena bunten - den med 20 kort - ligger. Därefter kan de i den andra endast placeras ut på ett sätt.)

7. Det finns 30 tärningar. (Sidan med 1 kan antas peka framåt. Det finns 5 möjligheter att välja motsatt sida. Antag att vi betraktar ett av dessa fall, ex.vis då 2 finns där. Vi kan sedan vrida tärningen så att 3 ligger uppåt. Det blir då olika tärningar när vi placerar ut de återstående 3 talen på de möjliga $3!$ olika sätten. Totalt fås alltså $5 \cdot 3!$ olika tärningar.)

8. På 330 sätt. (Tag först en av varje sort. Vi skall sedan välja sju äpplen av fem sorter. Här har vi ett "ordnat urval med repetition", och svaret blir $\binom{7+5-1}{7}$.)

9. Koefficienten är 4 365 900. (Följer genom en analys av binomialutvecklingen.)

10. (En mängd M med $3n$ element delas upp i tre delmängder med lika många element. Om vi skall plocka ut tre element ur M så har vi tre möjligheter:

- Alla tre ligger i samma delmängd. Detta svara mot den första termen.
- Två ligger i samma delmängd men det tredje i en annan. Detta svarar mot andra termen.
- Alla ligger i olika delmängder. Detta ger tredje termen. Svaret följer nu ur additionsprincipen.)

11. Uttrycket kan skrivas 4^n . (Använd en lämplig binomialutveckling!)

12. (Summan kan också skrivas

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}.$$

Detta gör att man kan ge ett kombinatoriskt argument för likheten. Högerledet är ju antalet sätt att välja n objekt ur $2n$ stycken. Om vi då delar upp de $2n$ objekten i två lika stora

grupper så kan vi ta 0 element ur den ena och alla ur den andra (vilket svara mot den första termen i summan) eller 1 element ur det ena och resten ur den andra eller 2 ur den ena ...etc.)

13. På 21 resp. 51 sätt. (Det första problemet svarar mot "oordnat urval med repetition", efter det att vi först valt fem röda bollar. Det andra kan vi lösa genom att beräkna "komplementet", dvs. först *alla* sätt att välja 10 bollar med tre färger och sedan alla sätt att välja 10 bollar så att man får minst 6 röda.)
14. På 19.958.400 sätt. (Välj först ut fyra platser och placera ut A,B,C och D på dessa. Detta kan ske på $\binom{12}{4}$ sätt. De resterande åtta platserna kan sedan fyllas på $8!$ olika sätt. Multiplikationsprincipen ger slutligen svaret.)
15. På 459 sätt. (Dela upp i fall beroende på om en av ettorna står först eller ej.)
16. På 910 sätt. (De tre brev som kommer fel kan väljas på $\binom{15}{3}$ olika sätt. Sedan ser vi lätt att de tre bara kan komma fel på två olika sätt.)
17. På 462 resp 15.400 sätt. (Svaret till del 1 kan skrivas $\frac{1}{2} \cdot \binom{12}{6}$ och svarar mot att vi först väljer ut sex personer ur de tolv. De resterande bildar då den andra gruppen. Men varje uppdelning kommer att förekomma *två* gånger, förstås! Svaret till del 2 kan skrivas $\binom{12}{3} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot \frac{1}{4}$.)
18. Det finns 21 arrangemang. (Här fungerar "korvmetoden". Först lägges ett föremål i varje skål. Sedan har vi 5 kvar, vilket tillsammans med två väggar ger 7 markeringar av vilka två väljes: $\binom{7}{2}$ fall.)
19.
 - a) 365^{23} .
 - b) $365^{23} - \binom{365}{23} \cdot 23!$.
 - c) Sannolikheten är ca. 50,2%. (Det första svaret är en följd av multiplikationsprincipen. I b) subtraherar vi från alla almanackor de där alla dagar är markerade högst en gång, dvs. då alla 23 personer fyller år på olika dagar. I c) delar vi svaret i b) med svaret i a).)
20.
 - a) 1296 serier.
 - b) 671 serier.
 - c) Ja. (Det första svaret är igen en konsekvens av multiplikationsprincipen. I det andra fallet drar vi från svaret i a) bort antalet serier utan en enda sexa - dvs. 5^4 stycken.)