

Problem om Induktion

1. Visa att $(2n)!/2^n$ är ett heltal om $n \in \mathbf{N}$.
2. Visa att summan av den n första udda, positiva naturliga talen är n^2 .
3. Visa att alla heltal som är större än eller lika med 12 kan skrivas som en summa av treor och femmor.
4. Visa att olikheten $n! > 2^n$ gäller för alla heltal ≥ 4 .
5. Visa att $6|(8^n - 2^n)$ för alla $n \in \mathbf{Z}_+$.
6. Visa att varje heltal ≥ 14 kan skrivas som en summa av åttor och treor.
7. Givet två positiva heltal m och n , kan man fråga sig om det finns ett positivt heltal N sådant att alla heltal $\geq N$ kan skrivas på formen $an + bm$. Ett nödvändigt villkor är uppenbarligen att m och n saknar gemensam delare. Men räcker detta, och kan man få ett uttryck för N i termer av m och n ?
8. Definiera de *harmoniska talen*, H_k genom att sätta

$$H_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{k}, \quad k \in \mathbf{Z}_+.$$

Visa att om $n \geq 0$ så gäller $H_{2^n} \geq 1 + n/2$.