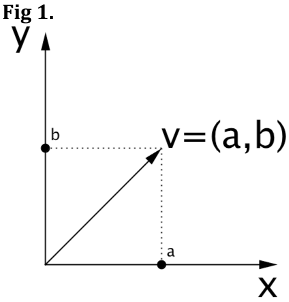
Funderingar runt vektorer
Linjär algebra och geometri I HT
Josef Schwan
Josef.Schwan.6616@student.uu.ss

Denna text är tänkt att fungera som diskussionsunderlag till nästkommande lektion. Texten börjar med en diskussion kring Norm, Skalärprodukt och Projektion. Därefter följer fyra exempel på lösningar till geometriska problem i $\mathbb{R}^3$. $\mathbb{R}^3$

Norm

Normen betecknar längden av en vektor. Normen för en vektor $\boldsymbol{v} = (a, b)$ i $\mathbb{R}^{32}$ definieras $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$, vilket följer ur Pythagoras sats (se fig. 1).

Fig 1.



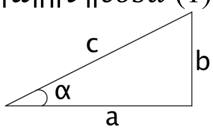
$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Trevligt nog kan denna definition expanderas till $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$ för en vektor $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ i $\mathbb{R}^n$.

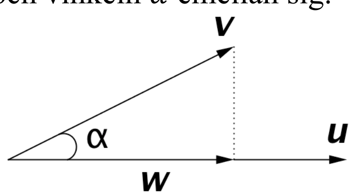
Om vi istället är intresserade av avståendet mellan två punkter $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ och $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ i R^n får vi $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}$ (avståndsformeln).

Vad är en skalärprodukt?

I $\mathbb{R}^2$ definieras skalärprodukten $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|cos\alpha$ (1) för två vektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ separerade med vinkeln α. Vi vet att för en triangel



gäller $cos\alpha = \frac{a}{c}$, vilket kan skrivas som $a = c * cos\alpha$ (2). Vi ritar en bild av två vektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ med samma ursprungspunkt och vinkeln α emellan sig.



I bilden har vi också satt ut en vektor $\boldsymbol{w}$, vilken är $\boldsymbol{v}$'s komponent längst $\boldsymbol{u}$. Då får vi ur (2) att $\|\boldsymbol{w}\| = \|\boldsymbol{v}\|cos\alpha$ (3). Vid insättning i (1) får vi $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{w}\|$ (4), där $\boldsymbol{w}$ är $\boldsymbol{v}$'s komponent längst $\boldsymbol{u}$. Alltså, skalärprodukten skapar två parallella vektorer och multiplicerar deras längder.

Anm. I $\mathbb{R}^n$ definieras skalärprodukten av vektorerna $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ och $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + \cdots + (u_n - v_n)$.

Projektionsformeln

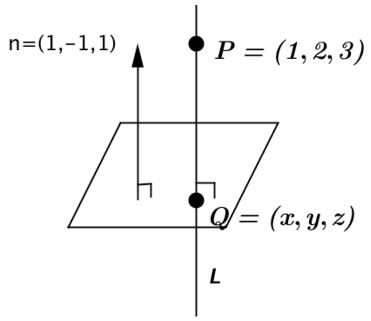
Med hjälp av projektionsformeln $\boldsymbol{w} = proj_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$ kan vi beräkna en vektor **u**'s komponent $\boldsymbol{w}$ längst en vektor **a**. Diskussionen runt skalärprodukt kan vi förhoppningsvis göra projektionsformeln mer greppbar. Om vi tänker oss att vi befinner oss i $\mathbb{R}^2$ och sätter in (1) i projektionsformeln får vi $\boldsymbol{w} = proj_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{u} = \frac{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{a}\|cos\alpha}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a} = \frac{\|\boldsymbol{u}\|cos\alpha}{\|\boldsymbol{a}\|}\boldsymbol{a} = \|\boldsymbol{u}\|cos\alpha\frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|}\boldsymbol{a}$, men $\frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|}\boldsymbol{a}$ är enhetsvektorn $\boldsymbol{e}_a$* till **a** och enligt (3) är $\|\boldsymbol{w}\| = \|\boldsymbol{u}\|cos\alpha$. Vi får $\boldsymbol{w} = proj_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{u} = \|\boldsymbol{w}\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{a}}$. Ur detta ser vi att projektionsformeln multiplicerar enhetsvektorn till $\boldsymbol{a}$ med längden av **u**'s komponent längst **a**, vilket förstås ger **u**'s komponent längst **a**.

Lösningar till avståndsproblem i R³

Avståndsproblem i $\mathbb{R}^3$ kan lösas på ett många olika sätt. Nedan följer några exempel på lämpliga metoder från den här kursen. Vi börjar med att finna avståndet mellan en punkt och ett plan, med hjälp av en linje vilken går genom punkt och är ortogonal mot planet.

Exempel 1. Finn närmaste punkten och avståndet mellan en punkt $P(1,2,3)$ och ett plan $\pi: x - b + z + 1 = 0$?

Vi ritar en bild.



Vi söker en punkt $Q \in \pi$ på en linje L genom P som är ortogonal mot π. Därefter beräknar vi avståndet mellan Q och P.

$\boldsymbol{n}$=(1,-1,1) är en normal till π och därför en riktningsvektor till L. Vi beräknar linjen L's ekvation $L: (x, y, z) = P + t\boldsymbol{n} = (1,2,3) + t(1, -1,1) = (1 + t, 2 - t, 3 + t)\,, t \in \mathbb{R}$.

L's ekvation ger $Q \in L \Longrightarrow Q(1 + t, 2 - t, 3 + t)$.

Vidare får vi $Q \in \pi \Longrightarrow\ (1 + t) - (2 - t) + (3 + t) + 1 = 0 \Leftrightarrow 3t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = -1$, vilket ger $t = -1\ \ \Longrightarrow Q(0,3,2)$.

---

* *Ibland är det användbart att kunna skapa en vektor med en viss riktning och längd 1. Från en vektor* $\boldsymbol{v}$ *kan vi skapa en vektor* $\boldsymbol{e}_v = \frac{1}{\|v\|}\boldsymbol{v}$*, som har samma rikting som* $\boldsymbol{v}$ *och längd 1. En sådan vektor kallas en enhetsvektor till* $\boldsymbol{v}$*.*

Josef Schwan
Josef.Schwan.6616@student.uu.ss

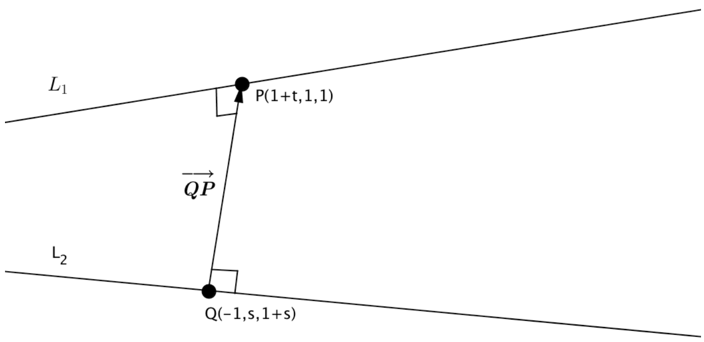
Avståndet mellan π och P ges av $\|\overrightarrow{QP}\| = \sqrt{(1-0)^2 + (2-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

Svar: Avståndet mellan punkten P och planet π är $\sqrt{3}$ l.e.

Ibland är det överflödigt att använda hela linjen utan det fungerar lika bra eller bättre att använda en vektor ortogonal mot någon eller båda objekten.

Exempel 2. Finn avståndet mellan linjerna $L_1: (x,y,z) = (1,1,1) + t(1,0,0)$ och $L_2: (x,y,z) = (-1,0,1) + s(0,1,1) \quad t,s \in \mathbb{R}$.

Vi ritar en bild



.

Vi söker de punkter $P \in L_1$ respektive $Q \in L_2$, för vilka $\overrightarrow{QP} \perp L_1, L_2$, och vill därefter beräkna avståndet $\|\overrightarrow{QP}\|$.

Eftersom P och Q ligger på L_1 respektive L_2 får vi
$P \in L_1 \Rightarrow P(1+t,1,1)$ och $Q \in L_2 \Rightarrow Q(-1,s,1+s) \Rightarrow \overrightarrow{QP} = (2+t, 1-s, -s)$.

Vidare gäller $\overrightarrow{QP} \perp L_1, L_2 \Rightarrow \overrightarrow{QP} \cdot l_1 = \overrightarrow{QP} \cdot l_2 = 0$, där betecknar l_1 och l_2 betecknar riktningsvektorerna för L_1 respektive L_2.

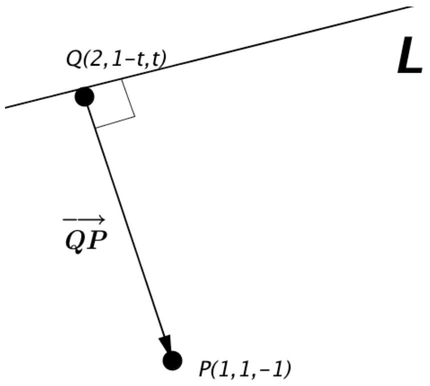
Men $l_1 = (1,0,0)$ och $l_2 = (0,1,1)$ är kända och vi kan utföra följande beräkningar
$0 = \overrightarrow{QP} \cdot l_1 = 2 + t \Leftrightarrow t = -2$ och $0 = \overrightarrow{QP} \cdot l_2 = s + 1 + s \Leftrightarrow s = -\frac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{QP} = \left(0, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
(Ur detta kan vi förstås också finna punkterna P och Q om vi skulle vilja.)

$$\|\overrightarrow{QP}\| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Svar: Avståndet mellan L_1 och L_2 är $\frac{\sqrt{10}}{2}$ l.e.

Exempel 3. Finn avståndet mellan punkten $P(1,1,-1)$ och linjen $L: (x, y, z) = (2,1,0) + t(0, -1,1) \quad t \in \mathbb{R}$. Finn även den punkt på L som ligger närmast P.

Vi ritar en bild



.

Vi söker en vektor $\overrightarrow{QP}$ med hjälp av L's ekvation, $Q \in L \Rightarrow Q(2,1-t,t) \Rightarrow \overrightarrow{QP} = (-1, t+, -1-t)$.

Vidare gäller att $\overrightarrow{QP} \perp L \Rightarrow \overrightarrow{QP} \cdot l = 0$ då avståndet $\|\overrightarrow{QP}\|$ som kortast.

Eftersom vi känner riktningsvektorn $l = (0, -1,1)$ kan vi beräkna
$0 = \overrightarrow{QP} \cdot l = (-1) * 0 + t * (-1) + (-1-t) * 1 = -t - 1 - t = -1 - 2t \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{QP} = \left(-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

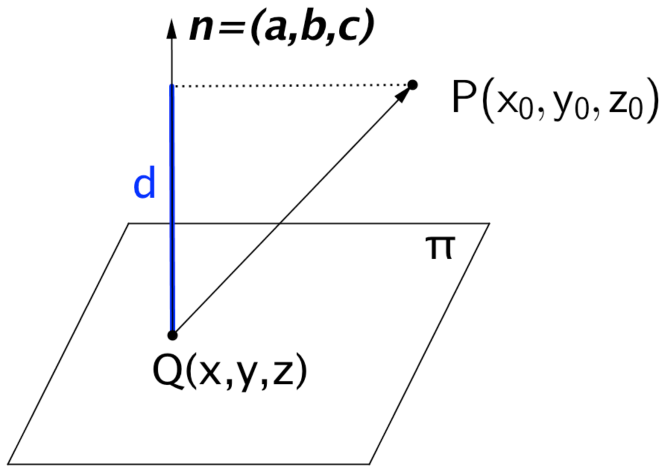
Avståndet mellan L och P ges av $\|\overrightarrow{QP}\| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Svar: Avståndet mellan L och P är $\frac{\sqrt{6}}{2}$ l.e.

Josef Schwan
Josef.Schwan.6616@student.uu.ss

Ni vet redan att avståndet mellan en punkt och ett plan kan beräknas med hjälp av avståndsformeln för en punkt och ett plan. Nedan följer en beskrivning av hur man med hjälp av ortogonal projektion härleder avståndsformeln. Därefter följer ett exempel som visar hur man kan beräkna ett sådant avstånd utan att komma ihåg själva formeln, om man vet teorin bakom.

Hur kan vi beräkna avståendet mellan en godtycklig punkt P $\in \mathbb{R}^3$ och ett plan $\pi: ax + by + cz + d = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}$? I figuren nedan ser vi att avståndet *d* mellan en punkt P $\in \mathbb{R}^3$och en punkt Q $\in \pi$ ges av längden av vektorn $\overrightarrow{QP}$'s komponent längst normalen till π. Det vill säga, längden av $\overrightarrow{QP}$'s projektion på $\boldsymbol{n}$.



Vi beräknar

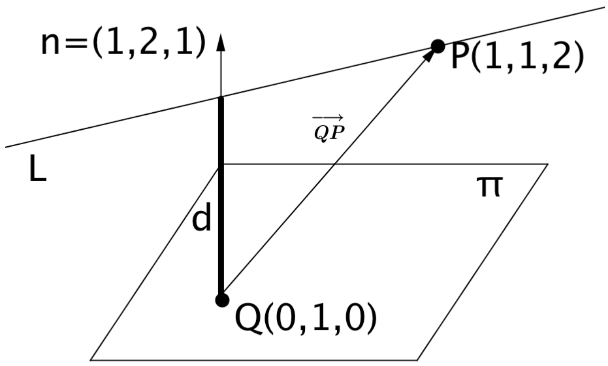
$$\|proj_{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{QP}\| = \frac{|\overrightarrow{QP}\cdot\boldsymbol{n}|}{\|\boldsymbol{n}\|^2}\|\boldsymbol{n}\| = \frac{|\overrightarrow{QP}\cdot\boldsymbol{n}|}{\|\boldsymbol{n}\|} = \frac{|a(x_0-x)+b(y_0-y)+c(z_0-z)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} =$$

$\begin{bmatrix} d = -ax - by - cz \\ enligt\ planets\ ekvation \end{bmatrix} = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ vilket vi känner igen som avståndsformeln mellan en punkt och ett plan.

Exempel 4. Finn avståndet mellan en linje $L: (x, y, z) = (1,1,2) + t(1, -1,1) \quad t \in \mathbb{R}$ och ett plan $\pi: x + 2y + z - 2 = 0$.

(Notera att L och π måste vara parallella för att inte skära varandra. Testar genom $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{l} = 1 * 1 + 2 * (-1) + 1 * 1 = 1 - 2 + 1 = 0 \Longrightarrow L \perp \boldsymbol{n} \Longrightarrow L \parallel \pi$, där $\boldsymbol{l}$ är Ls riktningsvektor.)

Vi ritar en bild



.

I det här fallet använder vi projektionsmetoden. Vi väljer en punkt $Q(0,1,0)$ i π och en punkt $P(1,1,2)$ på L, vilket ger vektorn $\overrightarrow{QP} = (1,0,2)$. $\boldsymbol{n} = (1,2,1)$ är en normal till π.

Vi får då

$$d = \left\|proj_{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{\boldsymbol{QP}}\right\| = \frac{|\overrightarrow{\boldsymbol{QP}}\cdot\boldsymbol{n}|}{\|\boldsymbol{n}\|^2}\|\boldsymbol{n}\| = \frac{|\overrightarrow{QP}\cdot\boldsymbol{n}|}{\|\boldsymbol{n}\|} = \frac{|1*1+0*2+2*1|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \frac{|3|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Svar: Avståndet mellan L och π är $\frac{\sqrt{6}}{2}$ l.e.

Anmärkning: Det går förstås bra att först beräkna $\overrightarrow{\boldsymbol{QP}}$*'s vektorkomponent längst* $\boldsymbol{n}$ *därefter längden av denna. Då slipper ni fundera över hur ni ska hantera absolutbelopp och normer i projektionsformeln.* $\boldsymbol{v} = proj_{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{\boldsymbol{QP}} = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{QP}}\cdot\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{n}\|^2}\boldsymbol{n} = \frac{3}{6}(1,2,1) = \left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right) \Longrightarrow \|v\| = \sqrt{\frac{1}{2}^2 + 1^2 + \frac{1}{2}^2} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Något att fundera över – hur kommer det sig att vi kommer fram till avståndsformeln för avståndet mellan en punkt och ett plan även i detta fall? Obs! Metoden fungerar på samma sätt när man vill bestämma avståndet mellan två parallella plan.

De tre metoder som presenterats ovan lämpar sig olika väl för olika problem. I de flesta fall räcker det att lära sig en lösningsmetod, men det kan bli komplicerat. Försök välja metod efter vad som ger enklast lösning. Ortogonal projektion är till exempel inte att rekommendera om man inte har en lämplig normal att projicera på.

Lycka till
Josef