Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Bo Styf

LAoG I, 5 hp
ES1, KandMa1, MatemA
2012-09-06

Sammanfattning av föreläsningarna 13 - 17.

Föreläsningarna 13–17, 8/10–15/10 2012: Det viktigaste är här att du lär dig

- att reducera en spännande samling vektorer till en bas,
- att komplettera en oberoende samling vektorer till en bas,
- att bestämma komponenterna av en vektor med avseende på en godtycklig bas,
- att bestämma standardmatrisen för en linjär avbildning. Speciellt i fallen då avbildningen är en rotation, projektion eller spegling.

Det är även dags att påbörja tentamensförberedelserna genom att lösa problem på gamla tentor. Glöm inte att studera lösningarna till kryssproblemen.

- **Reella vektorrum.** Vi inskränker oss till de geometriska vektorerna i planet (som kan identifieras med $\mathbb{R}^2$) och rummet (som kan identifieras med $\mathbb{R}^3$) samt rummen $\mathbb{R}^m$, $m > 3$, bestående av alla kolonnmatriser (ibland radmatriser) med m element. Dessutom betraktar vi alla delrum till dessa vektorrum.

- **Delrum.** En icke-tom delmängd W av $\mathbb{R}^m$ sägs vara ett **delrum** till $\mathbb{R}^m$ om det för alla $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ och varje $\lambda \in \mathbb{R}$ gäller att

$$\begin{array}{rl} \mathbf{u} + \mathbf{v} \in W & \quad W \text{ är slutet under vektoraddition.} \\ \lambda\mathbf{u} \in W & \quad W \text{ är slutet under multiplikation med skalärer.} \end{array}$$

  Om L och W är delrum till $\mathbb{R}^m$ och dessutom $L \subseteq W$ så säger vi att L är ett delrum till W.

  Eftersom W inte är tomt innehåller det en vektor $\mathbf{u}$. Av ovanstående definition följer att då innehåller W även alla multipler $\lambda\mathbf{u}$. Väljer vi speciellt $\lambda = 0$ fås $\lambda\mathbf{u} = \vec{0}$. Varje delrum till $\mathbb{R}^m$ måste alltså innehålla nollvektorn $\vec{0}$. Mängden $M = \{\vec{0}\}$, bestående av enbart nollvektorn, är ett delrum till $\mathbb{R}^m$ ty

$$\begin{aligned} \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \in M \\ \lambda\vec{0} = \vec{0} \in M \end{aligned}$$

  M är det minsta delrummet till $\mathbb{R}^m$. Det största delrummet till $\mathbb{R}^m$ är $\mathbb{R}^m$ självt.

- **Linjärkombinationer.** Låt $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ vara vektorer i $\mathbb{R}^m$. Summan

$$x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_1 x_1 + \cdots + \mathbf{a}_n x_n$$

  är en **linjärkombination** av $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ med **koefficienterna** $x_1, \ldots, x_n$.

Mängden av alla linjärkombinationer av $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ kallas för det **linjära höljet** av vektorerna $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ och betecknas som $[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$. Om $A = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ är $m \times n$-matrisen med $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ som kolonner och $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ så gäller att

$$A\mathbf{x} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{a}_1 x_1 + \cdots + \mathbf{a}_n x_n = x_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n$$

Det betyder att

$$[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n] = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

- **Linjära höljen är delrum.** Låt $W = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$. Då är W ett delrum till $\mathbb{R}^m$.

Bevis. Två godtyckliga vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ kan skrivas

$$\mathbf{u} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{v} = A\mathbf{z}, \quad (\text{där } A = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \text{ och } \mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n).$$

Av

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= A\mathbf{x} + A\mathbf{z} = A(\mathbf{x} + \mathbf{z}) \in W \\ \lambda \mathbf{u} &= \lambda A\mathbf{x} = A(\lambda \mathbf{x}) \in W \end{aligned}$$

följer att W är ett delrum. □

- **Nollrummet till en matris.** Låt $A = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ vara en $m \times n$-matris. Mängden

$$N(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \vec{0}\}$$

kallas för nollrummet till A. $N(A)$ är ett delrum till $\mathbb{R}^n$.

Bevis. Låt $\mathbf{x}, \mathbf{z}$ vara två godtyckliga vektorer i $N(A)$. Av

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x} + \mathbf{z}) &= A\mathbf{x} + A\mathbf{z} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \\ A(\lambda \mathbf{x}) &= \lambda A\mathbf{x} = \lambda \vec{0} = \vec{0} \end{aligned}$$

följer att $N(A)$ är ett delrum. □

- **Linjärt beroende och oberoende.** Vektorerna $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ sägs vara linjärt oberoende om det homogena ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \vec{0}$ **bara** har lösningen $\mathbf{x} = \vec{0}$. Eftersom

$$A\mathbf{x} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{a}_1 x_1 + \cdots + \mathbf{a}_n x_n = x_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n$$

kan detta uttryckas som att $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ är linjärt oberoende om och endast om det enda sättet att skriva nollvektorn som en linjärkombination av $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ är att ta samtliga koefficienter lika med noll.

Vektorerna $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ sägs vara linjärt beroende om de inte är linjärt oberoende. Alltså är $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ linjärt beroende om och endast om det homogena ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \vec{0}$ har en lösning $\mathbf{x} \neq \vec{0}$.

Vi har tidigare sett att varje matris A är radekvivalent med en unik reducerad trappmatris C. Ekvationssystemen $A\mathbf{x} = \vec{0}$ och $C\mathbf{x} = \vec{0}$ har samma lösningar. Systemet $C\mathbf{x} = \vec{0}$ har den entydiga lösningen $\mathbf{x} = \vec{0}$ om och endast om samtliga kolonner i C är pivotkolonner. I detta fall måste C ha formen

$$C = \begin{pmatrix} I_n \\ O \end{pmatrix}$$

där, om $m > n$, O är en matris med enbart nollor. Speciellt gäller att om $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ är linjärt oberoende så måste $m \geq n$. I fallet då $m = n$ så är $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$ linjärt oberoende om och endast om matrisen $A = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ är radekvivalent med enhetsmatrisen I_n. Detta är, som vi tidigare sett, ekvivalent med att A är inverterbar.

- **Baser.** Låt W vara ett delrum till $\mathbb{R}^m$. Vi säger att $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r)$ är en **bas** i W om $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r \in W$ och

  - $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r$ är linjärt oberoende,
  - $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r$ spänner upp W, d.v.s $W = [\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r]$.

  Detta innebär att för varje $\mathbf{w} \in W$ är ekvationssystemet $(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r \mid \mathbf{w})$ entydigt lösbart och när vi löser systemet får vi

$$(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r \mid \mathbf{w}) \sim \left(\begin{array}{c|c} I_r & \mathbf{h} \\ O & \vec{0} \end{array}\right)$$

  En viktig detalj är här att om $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r$ är linjärt oberoende och

$$(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r) \sim H$$

  så måste H ha minst r nollskilda rader.

- **Sats.** Antag att $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r$ är vektorer i delrummet W, sådana att W spänns upp av $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ och $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r$ är linjärt oberoende. Då gäller $n \geq r$ och $n = r$ om och endast om både $\underline{a} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r)$ och $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r)$ är baser i W.

  Bevis. Av förutsättningarna följer att matrisekvationen $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \mid \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r) = (A \mid B)$ är lösbar. Alltså har vi

$$(A \mid B) \sim \left(\begin{array}{c|c} C & H \\ O & O \end{array}\right) \tag{$*$}$$

  där matrisen till höger är en reducerad trappmatris (O:na står för nollmatriser och alla raderna i C är nollskilda). Eftersom H har minst r nollskilda rader, C har minst lika många nollskilda rader som H och C har högst n nollskilda rader följer att $n \geq r$. C har lika många pivotkolonner som den har rader. Alltså har C (och därmed A) minst r pivotkolonner. Om $n = r$ är därför alla kolonner i C pivotkolonner, vilket innebär att $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ är linjärt oberoende och därmed en bas i W. I den situationen gäller att $C = I_r$ och H är en inverterbar $r \times r$-matris. Genom att starta med $(B \mid A)$ och göra exakt samma följd av radoperationer som vi gjorde i $(*)$ och sedan avsluta med den följd av radoperationer som man gör vid beräkningen av H^{-1} får vi

$$(B \mid A) \sim \left(\begin{array}{c|c} H & I_r \\ O & O \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} I_r & H^{-1} \\ O & O \end{array}\right)$$

Detta visar att varje vektor i basen $\underline{a}$ är en linjärkombination av $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r$. Alltså spänner $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r$ upp W och följaktligen är $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r)$ en bas i W. Om slutligen både $\underline{a} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ och $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r)$ är baser i W så får vi, som ovan, att $n \geq r$. Eftersom $\underline{b}$ spänner upp W och $\underline{a}$ är linjärt oberoende måste vi även ha $r \geq n$. □

Två baser i ett delrum W måste alltså innehålla samma antal vektorer. Detta antal sägs vara W:s **dimension** och betecknas med $\dim W$. Eftersom ingen bas får innehålla nollvektorn tvingas vi definiera $\dim\{\vec{0}\} = 0$. Satsen säger också att om $n = \dim W$ och $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ är linjärt oberoende vektorer i W så är $\underline{a} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r)$ en bas i W. I $\mathbb{R}^m$ är $\underline{e} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m)$, där

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \ldots \quad \mathbf{e}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

en bas som kallas för standardbasen. Det innebär att $\dim\mathbb{R}^m = m$. Av ovanstående följer att varje äkta delrum till $\mathbb{R}^m$ har lägre dimension än m.

- **Sats.** Om $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ är linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^m$ och $\mathbf{a} \notin [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$ så är $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}$ linjärt oberoende.

Bevis. Antag att

$$\vec{0} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{a}_n - \lambda \mathbf{a} \tag{$*$}$$

Om $\lambda \neq 0$ så gäller

$$\mathbf{a} = \frac{\lambda_1}{\lambda}\mathbf{a}_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda}\mathbf{a}_n,$$

vilket strider mot förutsättningen att $\mathbf{a} \notin [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$. Alltså måste $\lambda = 0$. Men då har vi

$$\vec{0} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{a}_n,$$

vilket, eftersom $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ är linjärt oberoende, medför att

$$0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n.$$

Detta innebär att den enda lösningen till vektorekvationen $(*)$ är

$$0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \lambda$$

Alltså är $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}$ linjärt oberoende. □

- **Komplettering till en bas.** Om $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ är linjärt oberoende vektorer i W och

$$[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r] \neq W$$

så finns det vektorer $\mathbf{a}_{r+1}, \ldots, \mathbf{a}_n$ i W, sådana att $\underline{a} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ är en bas i W.

Bevis. Eftersom $[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r] \neq W$ måste det finnas en vektor $\mathbf{a}_{r+1} \in W$ sådan att $\mathbf{a}_{r+1} \notin [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r]$. Av föregående sats följer att $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r, \mathbf{a}_{r+1}$ är linjärt oberoende. Om nu

$$[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r, \mathbf{a}_{r+1}] = W$$

så är $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{r+1})$ en bas i W. Om inte så får förfarandet upprepas. Eftersom $\mathbb{R}^m$ inte innehåller fler än m linjärt oberoende vektorer måste vi få en bas i W efter högst $m - r$ steg. □

Ovanstående visar att det finns baser i varje delrum $W \neq \{\vec{0}\}$ till $\mathbb{R}^m$.

- **Reducering till en bas.** Antag att $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ är vektorer i delrummet W till $\mathbb{R}^m$ och att

$$[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n] = W$$

d.v.s $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ spänner upp W (vilket även kan uttryckas som att $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ är en spännande samling av vektorer). Då kan man bland vektorerna $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ plocka ut en bas $\underline{a} = (\mathbf{a}_{j_1}, \ldots, \mathbf{a}_{j_r})$ i W.

Standardmetoden för att göra detta har vi redan använt många gånger: Vi bildar $m \times n$-matrisen

$$A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$$

med vektorerna som kolonner. Därefter gör vi radoperationer tills vi får en reducerad trappmatris C:

$$A \sim (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n) = C$$

Om $\mathbf{c}_{j_1}, \ldots, \mathbf{c}_{j_r}$ är pivotkolonnerna i C så är $\underline{a} = (\mathbf{a}_{j_1}, \ldots, \mathbf{a}_{j_r})$ en bas i W. Basen består alltså av pivotkolonnerna i A, alltså av de kolonner i A som **inte** kan skrivas som linjärkombinationer av kolonnerna i A som ligger **till vänster** om kolonnen i fråga.

Som vi vet gäller även att de homogena ekvationssystemen $A\mathbf{x} = \vec{0}$ och $C\mathbf{x} = \vec{0}$ har samma lösningar. Lösningarna kan skrivas

$$\mathbf{x} = x_{k_1}\mathbf{v}_{k_1} + \cdots + x_{k_s}\mathbf{v}_{k_s} \qquad (*)$$

där $x_{k_1}, \ldots, x_{k_s}$ är de fria obekanta (svarande mot icke-pivotkolonnerna), $r + s = n$ och $\mathbf{v}_{k_1}, \ldots, \mathbf{v}_{k_s}$ (vektorer i $\mathbb{R}^n$) är de lösningar som fås då en av de fria obekanta sätts till 1 medan resten av de fria obekanta sätts till 0. Vektorerna $\mathbf{v}_{k_1}, \ldots, \mathbf{v}_{k_s}$ blir automatiskt linjärt oberoende och $(*)$ betyder att de spänner upp $N(A)$. Alltså är $\underline{v} = (\mathbf{v}_{k_1}, \ldots, \mathbf{v}_{k_s})$ en bas i $N(A)$.

- **Exempel.** Låt $W = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0\}$. Visa att W är ett delrum till $\mathbb{R}^3$. Bestäm en bas i W bestående av sinsemellan vinkelräta vektorer.

Lösning. Eftersom $W = N(A)$, där $A = (1, 1, -2)$, följer direkt att W är ett delrum till $\mathbb{R}^3$. För vektorerna i W gäller att $x = -y + 2z$, där y, z är godtyckliga. Sätter vi $y = -1$, $z = 0$ får vi vektorn $\mathbf{b}_1 = (1, -1, 0)^T \in W$. Vi ska nu hitta en vektor $\mathbf{b}_2 = (x, y, z)^T \in W$ som är vinkelrät mot $\mathbf{b}_1$. Det betyder att $x = -y + 2z$ samtidigt som

$$0 = \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = x - y \quad \Longrightarrow \quad y = x = -y + 2z \quad \Longrightarrow \quad x = y = z$$

Enklast är här att välja $x = y = z = 1$, vilket ger oss $\mathbf{b}_2 = (1, 1, 1)^T$. Då W är ett äkta delrum till $\mathbb{R}^2$ följer att antalet basvektorer i W är högst två. Å andra sidan har vi redan funnit två linjärt oberoende vektorer $\mathbf{b}_1$ och $\mathbf{b}_2$ i W så antalet basvektorer i W är minst två. Det betyder att $\underline{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ är en bas i W bestående av sinsemellan vinkelräta vektorer. $\square$

- **Exempel.** Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & -5 & 3 & 23 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 10 & -2 & -12 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & 4 & 5 & 2 & 7 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -3 & -1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -4 & -5 & 1 & 11 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 7 & 17 & 1 & -5 & 1 & 14 \end{pmatrix}$$

Ett delrum W, till $\mathbb{R}^6$, spänns upp av kolonnerna $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_8$, i A. Bestäm en bas $\underline{a}$ i W bland vektorerna $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_8$. Bestäm även en bas $\underline{v}$ i A:s nollrum $N(A)$. Utvidga $\underline{a}$ till en bas i $\mathbb{R}^6$ och $\underline{v}$ till en bas i $\mathbb{R}^8$ genom att tillfoga standardbasvektorer.

Lösning. Genom att göra en följd radoperationer får vi

$$A \sim C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pivotkolonnerna i C är $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_5, \mathbf{c}_7$. En bas i W är därför $\underline{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_7)$. Vi ska nu komplettera $\underline{a}$ med två standardbasvektorer till en bas i $\mathbb{R}^6$. För att slippa jobba så mycket chansar vi på att två av $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ duger och sätter upp matrisen

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_7 \mid \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \left(\begin{array}{rrrr|rrr} 1 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Efter ett antal radoperationer får vi trappmatrisen (ej reducerad)

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 15 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -7 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 73 \end{array}\right)$$

De sex första kolonnerna är pivotkolonner. Av detta följer att vi kan komplettera $\underline{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_7)$ med $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ till en bas

$$\underline{b} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_7, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$$

i $\mathbb{R}^6$. Nollrummet $N(A)$ utgörs av lösningarna till $C\mathbf{x} = \vec{0}$, alltså

$$\begin{cases} x_1 \quad - 2x_3 + 3x_4 + x_6 + 4x_8 = 0 \\ x_2 + x_3 + 4x_4 - 2x_6 + 3x_8 = 0 \\ x_5 + 6x_6 + 2x_8 = 0 \\ x_7 + x_8 = 0 \end{cases}$$

där vi underlåtit att skriva upp två triviala ekvationer (av typ $0 = 0$). Här ser vi att de bundna obekanta är x_1, x_2, x_5, x_7 och att dessa kan uttryckas i de fria obekanta x_3, x_4, x_6, x_8 enligt

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_3 - 3x_4 - x_6 - 4x_8 \\ x_2 &= -x_3 - 4x_4 + 2x_6 - 3x_8 \\ x_5 &= -6x_6 - 2x_8 \\ x_7 &= -x_8 \end{aligned}$$

Lösningarna till det homogena ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \vec{0}$ kan därför skrivas

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_3 - 3x_4 - x_6 - 4x_8 \\ -x_3 - 4x_4 + 2x_6 - 3x_8 \\ 1\,x_3 + 0x_4 + 0x_6 + 0x_8 \\ 0\,x_3 + x_4 + 0x_6 + 0x_8 \\ 0\,x_3 + 0x_4 - 6x_6 - 2x_8 \\ 0\,x_3 + 0x_4 + x_6 + 0x_8 \\ 0x_3 + 0x_4 + 0x_6 - x_8 \\ 0x_3 + 0x_4 + 0x_6 + x_8 \end{pmatrix} =$$

$$= x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_8 \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = x_3\mathbf{v}_3 + x_4\mathbf{v}_4 + x_6\mathbf{v}_6 + x_8\mathbf{v}_8,$$

där x_3, x_4, x_6, x_8 kan väljas fritt (det är därför de kallas för fria). Det följer att en bas i $N(A)$ är $\underline{v} = (\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_6, \mathbf{v}_8)$. Vi kan komplettera dessa fyra vektorer med standardbasvektorerna $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_7$ till en bas

$$\underline{c} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{e}_5, \mathbf{v}_6, \mathbf{e}_7, \mathbf{v}_8)$$

i $\mathbb{R}^8$. Att detta verkligen är en bas i $\mathbb{R}^8$ framgår direkt av att matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

med kolonnerna $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{e}_5, \mathbf{v}_6, \mathbf{e}_7, \mathbf{v}_8$, är uppåt triangulär, med ettor i diagonalen, och därför inverterbar. □

- **Komponenter.** Antag att $\underline{a} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ är en bas i delrummet W till $\mathbb{R}^m$. För varje $\mathbf{w} \in W$ finns det då entydiga tal $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sådana att

$$\mathbf{a}_1\lambda_1 + \cdots + \mathbf{a}_n\lambda_n = \mathbf{w}$$

Talen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ kallas för **w**:s komponenter (eller koordinater) i basen $\underline{a}$ och kolonnvektorn

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \mathbf{w}_a = \mathbf{w}_{\underline{a}} = (\mathbf{w})_a = (\mathbf{w})_{\underline{a}}$$

sägs vara **w**:s komponentvektor (eller koordinatvektor) i basen $\underline{a}$. För räkning med komponentvektorer gäller

–
$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})_a = \mathbf{u}_a + \mathbf{v}_a$$

–
$$(\lambda\mathbf{u})_a = \lambda\mathbf{u}_a$$

För att i praktiken bestämma komponentvektorn $\mathbf{w}_a$ löser man ekvationssystemet med matrisformen $(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n \mid \mathbf{w})$ och får

$$(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n \mid \mathbf{w}) \sim \left(\begin{array}{c|c} I_n & \mathbf{w}_a \\ O & \vec{0} \end{array}\right)$$

där O som vanligt står för en nollmatris.

- **Exempel.** Låt W vara delrummet till $\mathbb{R}^6$ i föregående exempel. Visa att vektorn

$$\mathbf{w} = (0,2,4,1,-1,6)^T$$

tillhör W och bestäm komponentvektorn för $\mathbf{w}$ i basen $\underline{a} = (\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_5,\mathbf{a}_7)$.

Lösning. Vi sätter upp ekvationssystemet $(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_5,\mathbf{a}_7 \mid \mathbf{w})$:

$$(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_5,\mathbf{a}_7 \mid \mathbf{w}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

och får med några radoperationer

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Det följer att $\mathbf{w} \in W$ och $\mathbf{w}_a = (1,1,1,1)^T$. □

- **Exempel.** Låt W vara delrummet till $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av $\mathbf{a}_1 = (1,4,1,4)^T$, $\mathbf{a}_2 = (2,5,1,3)^T$, $\mathbf{a}_3 = (3,9,2,7)^T$, $\mathbf{a}_4 = (0,-3,-1,-5)^T$ och $\mathbf{a}_5 = (3,5,1,2)^T$. Bestäm en bas i W bland dessa vektorer och utvidga denna bas till en bas i $\mathbb{R}^4$, med hjälp av vektorer ur standardbasen i $\mathbb{R}^4$.

Lösning. Vi bildar matrisen

$$(A \mid I_4) = (\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_5 \mid \mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_4) = \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 9 & -3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 7 & -5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

vilken, med några radoperationer, transformeras till

$$(C \mid H) = \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

Av denna reducerade trappmatris ser vi att $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ och $\mathbf{a}_5$ bildar en bas i W. Ytterligare ser vi att om denna bas i W kompletteras med en (men bara en) av vektorerna $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3$ eller $\mathbf{e}_4$ så får vi en bas i $\mathbb{R}^4$. Däremot kan vi inte komplettera med $\mathbf{e}_2$, ty $\mathbf{e}_2 = -\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_5$ (vilket direkt framgår av andra kolonnen i matrisen H). □

- **Linjära avbildningar.** En funktion (avbildning, transformation, operator) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sägs vara **linjär** om det finns en matris $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sådan att $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. A sägs vara f:s matris (eller standardmatris). Matrisen för f brukar betecknas som $[f]$.

  Att $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är linjär är ekvivalent med att

$$f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) \quad \text{och} \quad f(\lambda \mathbf{u}) = \lambda f(\mathbf{u}) \quad \text{för alla} \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

  För matrisen A gäller att

$$A = (f(\mathbf{e}_1), \ldots, f(\mathbf{e}_n)),$$

  där $\underline{e} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ är standardbasen i $\mathbb{R}^n$. Ofta kan man visa att en avbildning $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är linjär genom att direkt visa att

$$f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} \quad \text{för alla} \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \quad \text{där} \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

  Se nedan och, till exempel, redovisningsuppgift 2 till lektion 10.

- **Exempel.** För avbildningen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gäller att

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

  Visa att f är linjär och bestäm f:s standardmatris.

  Lösning. Eftersom

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A\mathbf{x}$$

  följer direkt att f är linjär med standardmatrisen A. □

- **Rotation i planet.** Avbildningen f som utför jobbet att rotera (vrida) en godtycklig vektor moturs vinkeln α har matrisen

$$[f] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

  För att inse detta tar vi en godtycklig vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$ och sätter

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \mathbf{w} = f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \cos\alpha - v_2 \sin\alpha \\ v_1 \sin\alpha + v_2 \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Vi har då

$$\begin{aligned}\|\mathbf{w}\|^2 &= w_1^2 + w_2^2 = v_1^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + v_2^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\\ &= v_1^2 + v_2^2 = \|\mathbf{v}\|^2\end{aligned}$$

Varje vektor avbildas alltså på en en vektor med samma längd.

$$\begin{aligned}\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} &= v_1^2\cos\alpha - v_1v_2\sin\alpha + v_1v_2\sin\alpha + v_2^2\cos\alpha\\ &= (v_1^2 + v_2^2)\cos\alpha = \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|\cos\alpha\end{aligned}$$

Alltså gäller

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|}$$

Vinkeln mellan $\mathbf{v} \neq \vec{0}$ och $\mathbf{w} = f(\mathbf{v})$ är därför alltid α. Slutligen gäller

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{v},\mathbf{w}) &= \begin{vmatrix} v_1 & v_1\cos\alpha - v_2\sin\alpha \\ v_2 & v_1\sin\alpha + v_2\cos\alpha \end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix} v_1 & -v_2\sin\alpha \\ v_2 & v_1\sin\alpha \end{vmatrix} = \|\mathbf{v}\|^2\sin\alpha > 0\end{aligned}$$

för $0 < \alpha < \pi$. Det innebär att $\mathbf{w}$ fås genom att rotera $\mathbf{v}$ moturs vinkeln α.

- **Projektionen längs en vektor.** Vi har tidigare visat att projektionen $\mathbf{w_n}$ av en vektor $\mathbf{w}$ längs en vektor $\mathbf{n}$ ges av

$$\mathbf{w_n} = \frac{1}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}(\mathbf{n}\mathbf{n}^T)\mathbf{w} = Q\mathbf{w},$$

där

$$Q = \frac{1}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\,\mathbf{n}\mathbf{n}^T$$

Enligt ovan är det klart att funktionen g som ges av $g(\mathbf{w}) = Q\mathbf{w}$ är linjär med matrisen Q.

I planet har vi $\mathbf{n} = (a,b)^T$, vilket ger $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = a^2 + b^2$ och

$$Q = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}(a\ b) = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$$

I rummet har vi $\mathbf{n} = (a,b,c)^T$, vilket ger $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = a^2 + b^2 + c^2$ och

$$Q = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(a\ b\ c) = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$$

- **Projektion på en linje i planet.** Linjen L, som går genom origo och är vinkelrät mot $\mathbf{n} = (a,b)^T$, har ekvationen $ax + by = 0$. Låt $\mathbf{w}$ vara en godtycklig vektor i $\mathbb{R}^2$ och låt $\mathbf{v} = Q\mathbf{w}$ vara projektionen av $\mathbf{w}$ längs $\mathbf{n}$. Enligt definitionen av projektionen av en vektor längs en vektor är då vektorn $\mathbf{u} = \mathbf{w} - \mathbf{v}$ vinkelrät mot $\mathbf{n}$ och därför parallell med L. Vektorn $\mathbf{u}$ sägs vara projektionen av $\mathbf{w}$ på L. Funktionen f, som avbildar $\mathbf{w}$ på $\mathbf{u}$, är linjär ty

$$f(\mathbf{w}) = \mathbf{u} = \mathbf{w} - \mathbf{v} = \mathbf{w} - Q\mathbf{w} = I\mathbf{w} - Q\mathbf{w} = (I - Q)\mathbf{w}, \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2.$$

Det framgår också att matrisen för f är $P = I - Q$. Alltså har vi

$$\begin{aligned} P &= I - Q \\ &= \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix} - \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} b^2 & -ab \\ -ab & a^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- **Projektion på ett plan i rummet.** På samma sätt får vi att den ortogonala projektionen f på planet $ax + by + cz = 0$ är linjär med matrisen

$$\begin{aligned} P &= I - Q \\ &= \frac{1}{\mathbf{n}^2}\begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2 \end{pmatrix} - \frac{1}{\mathbf{n}^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  där $\mathbf{n}^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Vid dessa beräkningar behöver man bara memorera formeln för Q och att $P = I - Q$. För matriserna P och Q gäller att $P + Q = I$, $PQ = QP = O$,

$$P = P^T = P^2 \quad \text{och} \quad Q = Q^T = Q^2.$$

- **Speglingen i en linje i planet eller i ett plan i rummet.** Denna linjära funktion h definieras (både i planet och rummet) av att dess matris är $S = [h]$, där $S = I - 2Q$. För S gäller att $S = S^T$ och

$$S^2 = (I - 2Q)^2 = I - 4Q + 4Q^2 = I - 4Q + 4Q = I.$$

  S är alltså inverterbar med sig själv som invers.

- **Speglingen i en linje i rummet.** Det går även att definiera speglingen r i en linje L, genom origo, i rummet. Antag att L är parallell med vektorn $\mathbf{n} = (a, b, c)^T$. Speglingen r definieras som den linjära operatorn på $\mathbb{R}^3$ som har matrisen

$$R = [r] = I - 2P = I - 2(I - Q) = 2Q - I = -S,$$

  där P, Q och S är som ovan.