Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Bo Styf

LAoG I, 5 hp
ES1, KandMa1, MatemA
2012-09-06

Sammanfattning av föreläsningarna 1 - 4.

Föreläsningarna 1–4, 6/9–13/9 2012: I sammanfattningen kommer en del av det vi tagit upp på föreläsningarna att överhoppas. Å andra sidan förekommer också sådant som inte tagits upp på föreläsningarna. Dessutom kan det hända att ordningsföljden kastas om.

- **Översikt.** Kursen handlar om samspelet mellan linjär algebra och geometri.

Linjär algebra	$\longleftarrow$ tillämpas på $\longrightarrow$	**Geometri**
Matriser		Vektorer
Matrisprodukt		Skalärprodukt, vinklar, längder
Matrisinvers		
Linjära ekvationssystem		
Determinanter		Vektorprodukt, areor, volymer, linjer, plan
Linjära avbildningar		Projektion på linje, projektion på plan, speglingar, vridning kring en axel.

- **Linjära ekvationssystem i två obekanta och räta linjer.** En linjär ekvation med två obekanta har utseendet $ax + by = c$, där x, y är de obekanta och a, b, c är konstanter (givna, fixa tal).

  Lösningsmängden L, till ekvationen, består av alla talpar (x_0, y_0) sådana att $ax_0 + by_0 = c$.

  – **Exempel.** $(x, y) = (5, 2)$ är en lösning till ekvationen $2x - 3y = 4$.
  $(x, y) = (5, 1)$ är inte en lösning till ekvationen $2x - 3y = 4$.

  – **Exempel.** Lös ekvationen $2x - 3y = 4$.

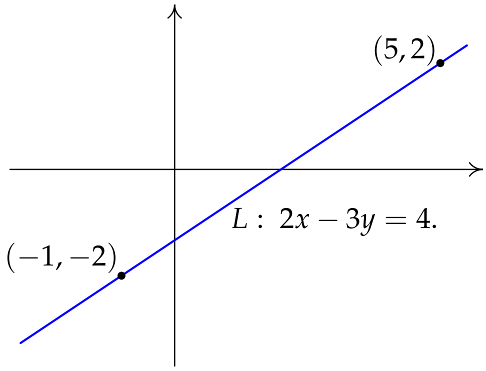
  Lösning. Att lösa en ekvation innebär att man ska hitta **alla** lösningar till ekvationen. Vi har

  $$2x - 3y = 4 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{2x-4}{3} \quad \Leftrightarrow \quad y = \tfrac{2}{3}x - \tfrac{4}{3}$$

  där ekvivalenspilarna betyder att de tre ekvationerna har samma lösningar. Av den sista ekvationen framgår att vi kan välja vilket värde som helst på x, säg $x = t,\ t \in \mathbb{R}$. Om vi sedan sätter $y = \frac{2}{3}t - \frac{4}{3}$ så är $(x, y) = (t, \frac{2}{3}t - \frac{4}{3})$ en lösning till ekvationen och samtliga lösningar till ekvationen fås på detta sätt. Lösningsmängden är alltså

  $$L = \{(x, y) \mid x = t,\ y = \tfrac{2}{3}t - \tfrac{4}{3} \quad \text{där} \quad t \in \mathbb{R}\}$$

  Geometriskt består L av punkterna på den räta linjen med ekvationen $2x - 3y = 4$:



Eftersom L är en rät linje gäller att om vi känner två lösningar, i det här fallet till exempel $(x, y) = (5, 2)$ och $(x, y) = (-1, -2)$, så kan vi bestämma samtliga lösningar (och det gäller även om vi glömt bort ekvationen). $\square$

– **Exempel.** Lös ekvationssystemet

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & 4 \\ 3x & + & 4y & = & 5 \end{array} \right\}$$

Lösning. När man löser ett ekvationssystem får man använda sig av följande tre operationer:

∗ Man får kasta om ordningen mellan ekvationerna.

∗ Man får multiplicera en ekvation med ett nollskilt tal.

∗ Man får till en ekvation addera en godtycklig multipel av en **annan** ekvation.

I alla tre fallen får man ett nytt ekvationssystem **som har samma lösningar som det föregående systemet**. Det innebär att varje system som uppkommer har samma lösningar som det ursprungliga systemet. Man strävar förstås efter att få fram ett så enkelt system att man lätt kan se vilka lösningarna är.

Här får vi successivt

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & 4 \\ 3x & + & 4y & = & 5 \end{array} \right\} \sim \left\{ \begin{array}{rcrcr} 6x & - & 9y & = & 12 \\ 6x & + & 8y & = & 10 \end{array} \right\} \sim \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & 4 \\ & & 17y & = & -2 \end{array} \right\}$$

$$\sim \left\{ \begin{array}{rcrcr} 34x & - & 51y & = & 68 \\ & & 51y & = & -6 \end{array} \right\} \sim \left\{ \begin{array}{rcrcr} 34x & & & = & 62 \\ & & 51y & = & -6 \end{array} \right\} \sim$$

$$\sim \left\{ \begin{array}{rcrcr} 17x & & & = & 31 \\ & & 17y & = & -2 \end{array} \right\} \sim \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & & & = & \frac{31}{17} \\ & & y & = & -\frac{2}{17} \end{array} \right\}$$

där symbolen $\sim$ betyder att systemet till vänster har samma lösningar som systemet till höger.

Det andra systemet fås, ur det första, genom att den första ekvationen multipliceras med tre och den andra ekvationen multipliceras med två. Genom denna manöver får vi $6x$ i båda ekvationerna vilket gör det lätt att i nästa steg eliminera x ur en av ekvationerna. Det tredje systemet fås, ur det andra, genom att den första ekvationen subtraheras från den andra ekvationen och därefter multipliceras den första ekvationen med $1/3$.

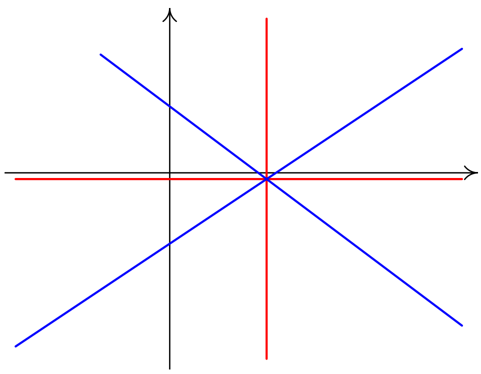
Vi har nu fått ett system där den andra ekvationen bara innehåller y och vi vill utnyttja den ekvationen för att eliminera y från den första ekvationen. När man handräknar ska man i möjligaste mån försöka undvika räkning med bråktal. För att göra detta multiplicerar vi nu den första ekvationen med 17 och den andra ekvationen med 3, varvid det fjärde systemet uppkommer, där vi har $51y$ i båda ekvationerna.

Nu eliminerar vi y ur den första ekvationen genom att addera den andra ekvationen till den första ekvationen. I det femte systemet, som då uppkommer, innehåller den första ekvationen enbart x och den andra ekvationen enbart y.

Genom att dividera den första ekvationen med 2 och den andra med 3 får vi det sjätte systemet. Hittills har vi undvikit bråkräkning, men för att få enklast tänkbara system, där x och y har koefficienten 1, tvingas vi nu att dividera båda ekvationerna med 17, varvid det sjunde systemet uppkommer.

Det sjunde systemet har **uppenbarligen** den enda lösningen $(x, y) = (\frac{31}{17}, -\frac{2}{17})$. Alltså har även det ursprungliga systemet den unika lösningen $(x, y) = (\frac{31}{17}, -\frac{2}{17})$.

I följande figur får vi en geometrisk bild av det som händer under lösningsproceduren:



De blå linjerna är lösningsmängderna till de båda ekvationerna i det ursprungliga systemet. Skärningspunkten mellan de blå linjerna är lösningsmängden till det ursprungliga systemet.

De röda linjerna är lösningsmängderna till de båda ekvationerna i det sjunde systemet. Skärningspunkten mellan de röda linjerna är lösningsmängden till det sjunde systemet.

Det framgår att det enda de båda systemen har gemensamt är just lösningsmängden, alltså punkten $(x, y) = (\frac{31}{17}, -\frac{2}{17})$. $\square$

- **Matriser.** En matris av typen $m \times n$ (eller $m \times n$-matris) är ett rektangulärt schema av reella tal, bestående av m rader och n kolonner. Exempelvis är

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & -6 & -7 & 8 \\ 9 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

en 3×4-matris. Parenteserna kring matrisen har ingen annan funktion än att separera matrisens innehåll från omgivningen.

Mängden av alla $m \times n$-matriser betecknas som $\mathbb{R}^{m \times n}$ eller $\mathbb{R}^{(m,n)}$. Talen i en matris A anges bäst genom användande av dubbla index (indices för att vara petig), så $A = (A_{ij})$, där A_{ij} anger talet i rad i och kolonn j. I ovanstående matris har vi, till exempel, $A_{13} = 3$, $A_{31} = 9$ och $A_{33} = -1$.

En kolonnmatris är en matris av typ $m \times 1$, medan en radmatris är en matris av typen $1 \times n$. Kolonnmatriser kallas även för kolonnvektorer, eller helt enkelt vektorer. Radmatriser kallas även för radvektorer. Vi kommer att skriva $\mathbb{R}^m$ i stället för $\mathbb{R}^{m\times 1}$. En nollmatris är en matris som bara innehåller nollor. Vi använder bokstaven O för att beteckna en nollmatris, förutom då matrisen är en kolonnmatris, då vi i stället skriver $\vec{0}$. En matris med lika många kolonner som rader, alltså av typ $n \times n$, sägs vara kvadratisk. Diagonalen i en kvadratisk matris $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ utgörs av talen $A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{nn}$.

Det är ibland lämpligt se en matris som en rad av kolonner. Exempelvis gäller för ovanstående matris att

$$A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) \quad \text{där} \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \; \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \; \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} \; \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Två matriser $A = (A_{ij})$ och $B = (B_{ij})$ sägs vara lika, vilket skrivs $A = B$, om och endast om de är av samma typ och $A_{ij} = B_{ij}$ för alla i och j. Vi ser att $m \times n$-matriserna

$$A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) \quad \text{och} \quad B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)$$

är lika om och endast om

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_1, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_2, \quad \ldots, \quad \mathbf{a}_n = \mathbf{b}_n.$$

- **Matrisräkning.** (Se avsnitt 1.3 i läroboken). Matrisräkning fungerar ungefär som räkning med tal (se TH 1.4.1), med vissa väsentliga undantag (se nedan).

  En matris kan multipliceras med en skalär (ett tal) enligt regeln $\lambda(A_{ij}) = (\lambda A_{ij})$. Exempelvis har vi

$$(-3)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & -6 & -7 & 8 \\ 9 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -9 & -12 \\ -15 & 18 & 21 & -24 \\ -27 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

  Två matriser av samma typ kan adderas enligt regeln $(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$. Exempelvis har vi

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & -6 & -7 & 8 \\ 9 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & -5 & -5 & 6 \\ 7 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

  För två $m \times n$-matriser

$$A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) \quad \text{och} \quad B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)$$

  gäller att

$$A + B = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n)$$

  För varje matris A definieras matrisen $-A$ genom $-A = (-1)A$. Precis som för tal gäller att $-A + A = O$ (en nollmatris).

Transponatet $A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$, av en $m\times n$-matris A, definieras genom $(A^T)_{ij} = A_{ji}$. Exempelvis har vi

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & -6 & -7 & 8 \\ 9 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ -2 & -6 & 0 \\ 3 & -7 & -1 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Transponatet av en kolonnmatris blir en radmatris och vice versa. Matrisen A sägs vara symmetrisk om $A^T = A$. Exempelvis är

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

symmetrisk. Symmetriska matriser är med nödvändighet kvadratiska.

- **Matrisprodukter.** Under vissa förutsättningar kan man även multiplicera två matriser. Om $A = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ är en $m\times n$-matris och $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ är en kolonnvektor så definieras produkten $A\mathbf{x}$ genom

$$A\mathbf{x} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{a}_1 x_1 + \cdots + \mathbf{a}_n x_n = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$$

Högerledet $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$ sägs vara en **linjärkombination** av kolonnerna i A, med **koefficienterna** $x_1, \ldots, x_n$. Produkten är bara är definierad om antalet kolonner i A är lika med antalet rader i $\mathbf{x}$. Om $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ och $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ så gäller $A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ ($A\mathbf{x}$ är en kolonnvektor med m rader).

I det speciella fallet då A är en radmatris, $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{1\times n}$, så får vi

$$A\mathbf{x} = (a_1, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$$

Matrisprodukten är alltså ett tal, som brukar kallas för **skalärprodukten** av radmatrisen $A = (a_1, \ldots, a_n)$ med kolonnvektorn $\mathbf{x}$.

Följande räkneregler gäller:

$$(A+B)\mathbf{x} = A\mathbf{x} + B\mathbf{x}, \quad A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}, \quad (\lambda A)\mathbf{x} = \lambda(A\mathbf{x}).$$

Produkten av en $m\times n$-matris A och en $n\times p$-matris $B = (\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_p)$ definieras sedan genom

$$AB = (A\mathbf{b}_1, \cdots, A\mathbf{b}_p)$$

Lägg märke till typregeln $(m\times n)(n\times p) = (m\times p)$.

- **Exempel.**

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + 4x_2 + 7x_3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 8 & -23 \end{pmatrix}$$

$AB = O$ (O betecknar alltid en nollmatris) kan gälla även i fall där $A \neq O$ och $B \neq O$. I allmänhet gäller att $AB \neq BA$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = (4, 5, 6), \quad AB = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}, \quad BA = (32) = 32$$

Produkten av en radmatris (till vänster) med en kolonnmatris (till höger) är, som vi har sett, en matris innehållande ett enda tal (i exemplet (32)). En sådan matris identifieras med det enda talet den innehåller (i exemplet $(32) = 32$). Observera också att produkten av en kolonnmatris (till vänster) med en radmatris (till höger) är definierad och normalt inte alls ett tal (produkten av en $m \times 1$-matris med en $1 \times n$-matris blir en $m \times n$-matris).

- **Matrisräkneregler.** Se TH.1.4.1, sid. 38.

$$A + B = B + A, \qquad A + (B + C) = (A + B) + C, \qquad A + O = A$$

$$A(B + C) = AB + AC, \qquad (A + B)C = AC + BC \qquad \text{(Distributiva lagarna)}$$

$$A(BC) = (AB)C, \qquad \text{(Associativa lagen för matrismultiplikation)}$$

$$(A^T)^T = A, \qquad (A + B)^T = A^T + B^T, \qquad (\lambda A)^T = \lambda A^T, \qquad (AB)^T = B^T A^T.$$

Vi nöjer oss med att bevisa den associativa lagen för matrismultiplikation: Antag först att $C = \mathbf{x}$ (en kolonnmatris). Vi får då

$$\begin{aligned} A(B\mathbf{x}) &= A(\mathbf{b}_1 x_1 + \cdots + \mathbf{b}_p x_p) = (A\mathbf{b}_1)x_1 + \cdots + (A\mathbf{b}_p)x_p \\ &= (A\mathbf{b}_1, \ldots, A\mathbf{b}_p)\mathbf{x} = (AB)\mathbf{x} \end{aligned}$$

I det allmänna fallet får vi

$$\begin{aligned} A(BC) &= A(B(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_l)) = A(B\mathbf{c}_1, \ldots, B\mathbf{c}_l) \\ &= (A(B\mathbf{c}_1), \ldots, A(B\mathbf{c}_l)) = ((AB)\mathbf{c}_1, \ldots, (AB)\mathbf{c}_l) \\ &= (AB)C. \end{aligned}$$

- **Enhetsmatriser.** En enhetsmatris är någon av följande:

$$I_1 = (1) \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{etc,}$$

alltså en kvadratisk matris med enbart ettor i diagonalen och enbart nollor för övrigt. För en godtycklig $m \times n$-matris A gäller att

$$I_m A = A I_n = A$$

- **Linjära ekvationssystem.** Ett linjärt ekvationssystem kan skrivas som en matrisekvation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där A är **koefficientmatrisen**, $\mathbf{x}$ är kolonnvektorn med de obekanta och $\mathbf{b}$ är kolonnvektorn innehållande högerledet. Exempelvis kan ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & ay & + & 3z & = & 2 \\ ax & + & y & + & (a+1)z & = & 1 \\ 2x & + & (a+2)y & + & (2a+2)z & = & 4 \end{array}\right. \tag{IH}$$

skrivas som

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 3 \\ a & 1 & a+1 \\ 2 & a+2 & 2a+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Man kan även skriva ekvationssystemet som

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b},$$

där $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_n$ är kolonnerna i koefficientmatrisen, $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ är de obekanta och $\mathbf{b}$ är högerledet. Skrivet på denna form blir, till exempel, ovanstående ekvationssystem

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \\ a+2 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ a+1 \\ 2a+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Av denna form framgår det att ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbart om och endast om $\mathbf{b}$ kan skrivas som en linjärkombination av kolonnerna i A.

- **Totalmatrisen.** Vid lösandet av ett ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är det oftast enklast att jobba med den så kallade totalmatrisen (eller utvidgade matrisen) $(A \mid \mathbf{b})$ (se nedan).

  – Ovanstående ekvationssystem (IH) har totalmatrisen

$$(A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 3 & 2 \\ a & 1 & a+1 & 1 \\ 2 & a+2 & 2a+2 & 4 \end{array}\right)$$

  – Vi har nu fyra sätt att skriva ett ekvationssystem. Till exempel kan ekvationssystemet vi tidigare löste skrivas på de fyra formerna

$$\text{(ES):} \left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & - & 3y & = & 4 \\ 3x & + & 4y & = & 5 \end{array}\right\} \quad \text{(ME):} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{(VE):}\ x\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \text{(TM):} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

  (ES) är ekvationssystemets grundform. (ME) är ekvationssystemet skrivet som en matrisekvation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (VE) är ekvationssystemet skrivet som en vektorekvation. (TM) är ekvationssystemets totalmatris.

- **Gausselimination.** Den normala proceduren vid lösandet av ett ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är att först skriva det på totalmatrisformen $\big(A \,|\, \mathbf{b}\big)$. Därefter fortsätter man med att göra **radoperationer**, med utgångspunkt från totalmatrisen, tills man får en speciellt enkel matris $\big(C \,|\, \mathbf{h}\big)$; en så kallad **trappmatris**.

  De tillåtna radoperationerna är:

  - Man får kasta om ordningen mellan raderna.
  - Man får multiplicera en rad med ett nollskilt tal.
  - Man får till en rad addera en godtycklig multipel av en **annan** rad.

  Observera att alla tre operationerna är reversibla: Om matrisen $\big(C \,|\, \mathbf{h}\big)$ uppkommer då man gör en radoperation på $\big(A \,|\, \mathbf{b}\big)$, så kan man återfå $\big(A \,|\, \mathbf{b}\big)$ genom att göra en radoperation på $\big(C \,|\, \mathbf{h}\big)$.

  Två matriser $\big(A \,|\, \mathbf{b}\big)$ och $\big(C \,|\, \mathbf{h}\big)$ sägs vara **radekvivalenta**, vilket skrivs som $\big(A \,|\, \mathbf{b}\big) \sim \big(C \,|\, \mathbf{h}\big)$, om den ena matrisen kan transformeras till den andra genom ett antal radoperationer.

- **Exempel.** En typisk (reducerad) trappmatris är

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Det utmärkande för en sådan är

  - I varje nollskild rad är det första nollskilda elementet, från vänster räknat, en etta. Man säger att raden har en ledande etta. En kolonn som innehåller en ledande etta sägs vara en **pivotkolonn**. I ovanstående matris C är första-, andra-, femte- och sjunde kolonnerna pivotkolonner.
  - Den ledande ettan i varje rad ligger till vänster om de ledande ettorna i följande nollskilda rader.
  - Förutom den ledande ettan innehåller varje pivotkolonn bara nollor. I ovanstående matris C är, till exempel, pivotkolonnerna

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{c}_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- **Sats.** Matriserna $\big(A \,|\, \mathbf{b}\big)$ och $\big(C \,|\, \mathbf{h}\big)$, av samma typ, är radekvivalenta om och endast om motsvarande ekvationssystem, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ och $C\mathbf{x} = \mathbf{h}$, har samma lösningar. Speciellt gäller att $A \sim C$ om och endast om de homogena ekvationssystemen $A\mathbf{x} = \vec{0}$ och $C\mathbf{x} = \vec{0}$ har samma lösningar.

Bevis. Att radekvivalenta matriser svarar mot ekvationssystem som har samma lösningar följer direkt av att en radoperation på en totalmatris ger totalmatrisen för det ekvationssystem som uppkommer då man gör motsvarande operation på (det första) ekvationssystemet.

Vi får vänta med att visa att totalmatriserna för två ekvationssystem, som har samma lösningar, är radekvivalenta. □

Ovanstående innebär att ekvationssystemet $C\mathbf{x} = \mathbf{h}$, som svarar mot trappmatrisen $(C \mid \mathbf{h})$, har samma lösningar som det ursprungliga ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, vilka därför lätt kan avläsas.

- **Exempel.** Lös, med hjälp av totalmatriser, ekvationssystemet

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & 4 \\ 3x & + & 4y & = & 5 \end{array} \right\}$$

Lösning. Ekvationssystemet har totalmatrisen

$$(A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{rr|r} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{array} \right)$$

Med utgångspunkt från $(A \mid \mathbf{b})$ gör vi nu en serie radoperationer tills vi får en trappmatris $(C \mid \mathbf{h})$:

$$(A \mid \mathbf{b}) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 6 & -9 & 12 \\ 6 & 8 & 10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 6 & -9 & 12 \\ 0 & 17 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 17 & -2 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rr|r} 34 & -51 & 68 \\ 0 & 51 & -6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 34 & 0 & 62 \\ 0 & 51 & -6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 17 & 0 & 31 \\ 0 & 17 & -2 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & \frac{31}{17} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{17} \end{array} \right) \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & \frac{31}{17} \\ y & = & -\frac{2}{17} \end{array} \right\}$$

där $\longleftrightarrow$ kan utläsas som **svarar mot ekvationssystemet**. Som vi tidigare sett är det sista ekvationssystemet så enkelt att vi genast kan utläsa att lösningen är $(x, y) = (\frac{31}{17}, -\frac{2}{17})$.

Den sista totalmatrisen

$$(C \mid \mathbf{h}) = \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & \frac{31}{17} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{17} \end{array} \right)$$

är en trappmatris. Kolonnerna i denna är

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} \frac{31}{17} \\ -\frac{2}{17} \end{pmatrix}$$

Kolonnerna $\mathbf{c}_1$ och $\mathbf{c}_2$ är trappmatrisens **pivotkolonner**. Vare sig $\mathbf{c}_1$ eller $\mathbf{c}_2$ kan skrivas som en multipel av den andra pivotkolonnen. Den tredje kolonnen $\mathbf{h}$ kan däremot skrivas som en linjärkombination av pivotkolonnerna:

$$\begin{pmatrix} \frac{31}{17} \\ -\frac{2}{17} \end{pmatrix} = \tfrac{31}{17} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \tfrac{2}{17} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{d v s} \quad \mathbf{h} = \tfrac{31}{17}\mathbf{c}_1 - \tfrac{2}{17}\mathbf{c}_2$$

Lägg nu märke till att för den ursprungliga totalmatrisen $(A \mid \mathbf{b})$, med kolonnerna

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

gäller att

$$\mathbf{b} = \tfrac{31}{17}\,\mathbf{a}_1 - \tfrac{2}{17}\,\mathbf{a}_2 = \tfrac{1}{17}\begin{pmatrix} 62 \\ 93 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{17}\begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{17}\begin{pmatrix} 68 \\ 85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Förklara varför. □

- **Lösbarhet.** I allmänhet gäller att systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbart om och endast om den sista nollskilda raden i trappmatrisen $(C \mid \mathbf{h})$ **inte** har formen $0, \ldots, 0 \mid 1$ (svarande mot den orimliga ekvationen $0 = 1$).

  Om $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbart gäller att de **fria** obekanta (som du kan ge godtyckliga värden) svarar mot **icke**-pivotkolonnerna i $(C \mid \mathbf{h})$, medan de **bundna** obekanta (vars värden är helt bestämda av värdena på de fria obekanta) svarar mot pivotkolonnerna i $(C \mid \mathbf{h})$.

  Lösningen kan skrivas som $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_k\mathbf{v}_k$, där $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_k$ är värdena på de fria obekanta (som ju kan väljas godtyckligt). Här gäller att $\mathbf{x}_p$ (som är det $\mathbf{x}$ som erhålls då man sätter alla fria obekanta lika med 0) är en lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, medan $\mathbf{x}_h = t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_k\mathbf{v}_k$ är den allmänna lösningen till det homogena ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \vec{0}$.

- **Exempel.** Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & -5 & 3 & 23 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 10 & -2 & -12 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & 4 & 5 & 2 & 7 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -3 & -1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -4 & -5 & 1 & 11 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 7 & 17 & 1 & -5 & 1 & 14 \end{pmatrix}$$

  Bestäm den unika (reducerade) trappmatrisen C, som är radekvivalent med A. Lös det homogena ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \vec{0}$. Använd lösningen för att bestämma sambanden mellan kolonnerna i A.

  Lösning. Genom att göra en följd radoperationer, som vi hoppar över men som du bör göra, får vi

$$A \sim C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Ekvationssystemet $C\mathbf{x} = \vec{0}$, som har samma lösningar som $A\mathbf{x} = \vec{0}$, är alltså

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 3x_4 + x_6 + 4x_8 = 0 \\ x_2 + x_3 + 4x_4 - 2x_6 + 3x_8 = 0 \\ x_5 + 6x_6 + 2x_8 = 0 \\ x_7 + x_8 = 0 \end{cases}$$

där vi underlåtit att skriva upp två triviala ekvationer (av typ $0 = 0$). Här ser vi att de obekanta x_1, x_2, x_5 och x_7 (de bundna obekanta) kan uttryckas i de obekanta x_3, x_4, x_6 och x_8 (de fria obekanta) enligt

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_3 - 3x_4 - x_6 - 4x_8 \\ x_2 &= -x_3 - 4x_4 + 2x_6 - 3x_8 \\ x_5 &= -6x_6 - 2x_8 \\ x_7 &= -x_8 \end{aligned}$$

Lösningarna till det homogena ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \vec{0}$ kan därför skrivas

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_3 - 3x_4 - x_6 - 4x_8 \\ -x_3 - 4x_4 + 2x_6 - 3x_8 \\ 1\,x_3 + 0x_4 + 0x_6 + 0x_8 \\ 0\,x_3 + x_4 + 0x_6 + 0x_8 \\ 0\,x_3 + 0x_4 - 6x_6 - 2x_8 \\ 0\,x_3 + 0x_4 + x_6 + 0x_8 \\ 0x_3 + 0x_4 + 0x_6 - x_8 \\ 0x_3 + 0x_4 + 0x_6 + x_8 \end{pmatrix} =$$

$$= x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_8 \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= x_3\,\mathbf{v}_3 + x_4\,\mathbf{v}_4 + x_6\,\mathbf{v}_6 + x_8\,\mathbf{v}_8$$

där x_3, x_4, x_6, x_8 kan väljas fritt (det är därför de kallas för fria). Kolonnvektorerna $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$, $\mathbf{v}_6$, $\mathbf{v}_8$ är de lösningsvektorer (till $A\mathbf{x} = \vec{0}$) som fås då en av de fria obekanta sätts till 1, medan de övriga sätts till 0. Varje lösning till $A\mathbf{x} = \vec{0}$ kan alltså skrivas som

$$\mathbf{x} = x_3\,\mathbf{v}_3 + x_4\,\mathbf{v}_4 + x_6\,\mathbf{v}_6 + x_8\,\mathbf{v}_8$$

där x_3, x_4, x_6, x_8 är unika för varje lösning i den meningen att om

$$\xi_3\,\mathbf{v}_3 + \xi_4\,\mathbf{v}_4 + \xi_6\,\mathbf{v}_6 + \xi_8\,\mathbf{v}_8 = x_3\,\mathbf{v}_3 + x_4\,\mathbf{v}_4 + x_6\,\mathbf{v}_6 + x_8\,\mathbf{v}_8$$

så måste

$$\xi_3 = x_3, \quad \xi_4 = x_4, \quad \xi_6 = x_6 \quad \text{och} \quad \xi_8 = x_8.$$

Vi gör nu om detta, fast på ett lite annorlunda sätt. Kolonnerna i den reducerade trappmatrisen C är

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{c}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_8 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ekvationssystemen $A\mathbf{x} = \vec{0}$ och $C\mathbf{x} = \vec{0}$ kan skrivas som

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_4\mathbf{a}_4 + x_5\mathbf{a}_5 + x_6\mathbf{a}_6 + x_7\mathbf{a}_7 + x_8\mathbf{a}_8 = \vec{0}. \tag{\#}$$

respektive

$$x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + x_3\mathbf{c}_3 + x_4\mathbf{c}_4 + x_5\mathbf{c}_5 + x_6\mathbf{c}_6 + x_7\mathbf{c}_7 + x_8\mathbf{c}_8 = \vec{0}. \tag{$*$}$$

Pivotkolonnerna i C är de som har en etta på en plats och nollor på övriga platser. Alltså $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_5$ och $\mathbf{c}_7$. De bundna obekanta i ekvationssystemet $C\mathbf{x} = \vec{0}$ är därför x_1, x_2, x_5 och x_7. Övriga kolonner, alltså $\mathbf{c}_3$, $\mathbf{c}_4$, $\mathbf{c}_6$ och $\mathbf{c}_8$, är inga pivotkolonner. De fria obekanta i ekvationssystemet $C\mathbf{x} = \vec{0}$ är därför x_3, x_4, x_6 och x_8. För kolonnerna $\mathbf{c}_3$, $\mathbf{c}_4$, $\mathbf{c}_6$ och $\mathbf{c}_8$ gäller att var och en av dem kan skrivas som en linjärkombination av de pivotkolonner som ligger **till vänster** om kolonnen i fråga. Närmare bestämt gäller att

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_3 &= -2\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 \\
\mathbf{c}_4 &= 3\mathbf{c}_1 + 4\mathbf{c}_2 \\
\mathbf{c}_6 &= \mathbf{c}_1 - 2\mathbf{c}_2 + 6\mathbf{c}_5 \\
\mathbf{c}_8 &= 4\mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2 + 2\mathbf{c}_5 + \mathbf{c}_7
\end{aligned}$$

Kontrollera detta! Dessa likheter kan skrivas som

$$\begin{aligned}
\vec{0} &= (-2)\,\mathbf{c}_1 + 1\,\mathbf{c}_2 + (-1)\,\mathbf{c}_3 + 0\,\mathbf{c}_4 + 0\,\mathbf{c}_5 + 0\,\mathbf{c}_6 + 0\,\mathbf{c}_7 + 0\,\mathbf{c}_8 \\
\vec{0} &= 3\,\mathbf{c}_1 + 4\,\mathbf{c}_2 + 0\,\mathbf{c}_3 + (-1)\,\mathbf{c}_4 + 0\,\mathbf{c}_5 + 0\,\mathbf{c}_6 + 0\,\mathbf{c}_7 + 0\,\mathbf{c}_8 \\
\vec{0} &= 1\,\mathbf{c}_1 + (-2)\,\mathbf{c}_2 + 0\,\mathbf{c}_3 + 0\,\mathbf{c}_4 + 6\,\mathbf{c}_5 + (-1)\,\mathbf{c}_6 + 0\,\mathbf{c}_7 + 0\,\mathbf{c}_8 \\
\vec{0} &= 4\,\mathbf{c}_1 + 3\,\mathbf{c}_2 + 0\,\mathbf{c}_3 + 0\,\mathbf{c}_4 + 2\,\mathbf{c}_5 + 0\,\mathbf{c}_6 + 1\,\mathbf{c}_7 + (-1)\,\mathbf{c}_8
\end{aligned}$$

Alltså är kolonnvektorerna $\mathbf{x} =$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

lösningar till $C\mathbf{x} = \vec{0}$. Som vi har sett är de då också lösningar till $A\mathbf{x} = \vec{0}$, vilket betyder att vi har likheterna

$$\begin{aligned}
\vec{0} &= (-2)\,\mathbf{a}_1 + 1\,\mathbf{a}_2 + (-1)\,\mathbf{a}_3 + 0\,\mathbf{a}_4 + 0\,\mathbf{a}_5 + 0\,\mathbf{a}_6 + 0\,\mathbf{a}_7 + 0\,\mathbf{a}_8 \\
\vec{0} &= 3\,\mathbf{a}_1 + 4\,\mathbf{a}_2 + 0\,\mathbf{a}_3 + (-1)\,\mathbf{a}_4 + 0\,\mathbf{a}_5 + 0\,\mathbf{a}_6 + 0\,\mathbf{a}_7 + 0\,\mathbf{a}_8 \\
\vec{0} &= 1\,\mathbf{a}_1 + (-2)\,\mathbf{a}_2 + 0\,\mathbf{a}_3 + 0\,\mathbf{a}_4 + 6\,\mathbf{a}_5 + (-1)\,\mathbf{a}_6 + 0\,\mathbf{a}_7 + 0\,\mathbf{a}_8 \\
\vec{0} &= 4\,\mathbf{a}_1 + 3\,\mathbf{a}_2 + 0\,\mathbf{a}_3 + 0\,\mathbf{a}_4 + 2\,\mathbf{a}_5 + 0\,\mathbf{a}_6 + 1\,\mathbf{a}_7 + (-1)\,\mathbf{a}_8
\end{aligned}$$

vilka kan omskrivas som

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_3 &= -2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \\
\mathbf{a}_4 &= 3\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2 \\
\mathbf{a}_6 &= \mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + 6\mathbf{a}_5 \\
\mathbf{a}_8 &= 4\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_5 + \mathbf{a}_7
\end{aligned}$$

Det råder alltså exakt samma samband mellan kolonnerna i A som mellan kolonnerna i C, vilket du bör kontrollera! Av den anledningen sägs $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_5$ och $\mathbf{a}_7$ vara pivotkolonnerna i matrisen A. Övriga kolonner, alltså $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_6$ och $\mathbf{a}_8$, kan skrivas som linjärkombinationer av pivotkolonnerna. Eftersom pivotkolonnerna själva givetvis (hur då?) kan skrivas som linjärkombinationer av pivotkolonnerna kan alltså varje kolonn i matrisen A uttryckas som en linjärkombination av pivotkolonnerna i A.

Med ledning av ovanstående kan vi definiera pivotkolonnerna i en godtycklig matris A som de kolonner i A som **inte** kan skrivas som en linjärkombination av kolonnerna i A, som ligger **till vänster** om kolonnen i fråga.

Genom att resonera som vi gjort i detta exempel är det enkelt att bevisa den viktiga satsen att varje matris är radekvivalent med en **unik** reducerad trappmatris. Av detta följer sedan att totalmatriserna för två ekvationssystem, som har samma lösningar, är radekvivalenta. Därmed slutför vi beviset av en ovanstående sats. $\square$

- **Exempel.** Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lös, för alla $a \in \mathbb{R}$, ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Bestäm pivotkolonnerna i A och uttryck, då så är möjligt, $\mathbf{b}$ och övriga kolonner i A som linjärkombinationer av pivotkolonnerna.

Lösning. Vi gör allt detta i ett svep. Vi sätter upp totalmatrisen och gör radoperationer (vilka?) tills vi får en trappmatris:

$$(A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & a \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & a \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2+a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1+a \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3+a \end{array}\right) = (C \mid \mathbf{h})$$

Trappmatrisen $(C \mid \mathbf{h})$ svarar mot ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & + & 3x_3 & & & = & a+1 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & & & = & 1-a \\ & & & & & & x_4 & = & -1 \\ & & & & & & 0 & = & a+3 \end{array}\right.$$

Om $a+3 \neq 0$ är den sista ekvationen, $0 = a+3(\neq 0)$, orimlig, så systemet är olösbart då $a \neq -3$. Om däremot $a = -3$ så blir det sista ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} x_1 & & + & 3x_3 & & = & -2 \\ & x_2 & - & 2x_3 & & = & 4 \\ & & & & x_4 & = & -1 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Vi ser att x_3 är en fri obekant, som vi kan välja ett godtyckligt värde på. De övriga obekanta kan uttryckas i x_3; $x_1 = -2-3x_3$, $x_2 = 4+2x_3$, $x_4 = -1$. Ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har, då $a = -3$, alltså lösningarna

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-3x_3 \\ 4+2x_3 \\ 0+\ \ x_3 \\ -1+0x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

där $x_3 \in \mathbb{R}$ är godtyckligt. Pivotkolonnerna i C är $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ och $\mathbf{c}_4$, vilket medför att pivotkolonnerna i A är $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ och $\mathbf{a}_4$. Vi ser direkt att $\mathbf{c}_3 = 3\mathbf{c}_1 - 2\mathbf{c}_2$, av vilket följer att $\mathbf{a}_3 = 3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2$. Låt oss kontrollera att det verkligen stämmer:

$$3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \mathbf{a}_3$$

Då $a = -3$ gäller att $\mathbf{h} = -2\mathbf{c}_1 + 4\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_4$, av vilket följer att $\mathbf{b} = -2\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_4$. För ordningens skull kontrollerar vi även detta:

$$-2\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{b},$$

i fallet då $a = -3$. □

- **Exempel.** Lös ekvationssystemet (IH) ovan för alla värden på den reella konstanten a.

Lösning. (Se lösta problem 1. Vi hoppar över en del detaljer här.) Enligt ovan blir systemets matrisform (totalmatrisen)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 3 & 2 \\ a & 1 & a+1 & 1 \\ 2 & a+2 & 2a+2 & 4 \end{array}\right)$$

Genom några radoperationer transformeras detta till

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a \\ 0 & a & 2a-2 & 2 \end{array}\right). \qquad (*)$$

Om $a = 1$ så blir $(*)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Av det högra systemet framgår att då $a = 1$ har (det ursprungliga) ekvationssystemet den entydiga lösningen $(x, y, z) = (-3, 2, 1)$.

Om $a \neq 1$ kan den tredje raden i $(*)$ divideras med $1 - a$, varvid vi får

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 2a-2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-a & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & 2-a \end{array}\right) \tag{\#}$$

I (#) ser vi att då $a \neq 2$ kan vi dividera den fjärde raden med $2 - a$ varvid vi erhåller $(0\,0\,0 \mid 1)$. Denna rad svarar mot den orimliga ekvationen $0 = 1$. Alltså saknar systemet lösningar då $a \notin \{1, 2\}$.

Om $a = 2$ blir den högra matrisen i (#)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \big(C \,|\, \mathbf{h}\big). \tag{$\heartsuit$}$$

$\big(C \,|\, \mathbf{h}\big)$ är en reducerad trappmatris. Första- och andra kolonnen är pivotkolonner, vilket betyder att x, y är bundna obekanta. Den tredje kolonnen är ej någon pivotkolonn, vilket innebär att z är en fri obekant. Den första raden i $(\heartsuit)$ svarar mot ekvationen $x + z = 0$. Den andra raden i $(\heartsuit)$ svarar mot ekvationen $y + z = 1$. Sätter vi $z = t$ får vi därför $x = -t$ och $y = 1 - t$, vilket ger oss lösningarna $(x, y, z) = (-t, 1 - t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Skriver vi denna lösning på kolonnform, vilket är bäst, så får vi

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 1-t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{r}_p + t\,\mathbf{v}.$$

Här gäller att $\mathbf{r} = \mathbf{r}_p$ är en lösning till (IH), medan $\mathbf{r} = t\,\mathbf{v}$ är den allmänna lösningen till motsvarande homogena system (systemet med samma koefficientmatris och högerledet $\vec{0}$).

Svar. Då $a \notin \{1, 2\}$ saknar systemet lösningar. Då $a = 1$ har systemet den entydiga lösningen $(x, y, z) = (-3, 2, 1)$. Då $a = 2$ har systemet ett oändligt antal lösningar, vilka ges av $(x, y, z) = (-t, 1 - t, t) = (0, 1, 0) - t(1, 1, -1)$, $t \in \mathbb{R}$. □

- **Rang.** Om A är en $m \times n$-matris och $A \sim C$ där C är en trappmatris med r nollskilda rader sägs A ha **rangen** r. Eftersom antalet nollskilda rader i C är lika med antalet pivotkolonner så följer att rangen är **högst** lika med det **minsta** av talen m och n. En $m \times n$-matris med rang lika med det minsta av talen m och n sägs ha **full** rang (större rang kan den inte ha). En $m \times n$-matris som innehåller en nollrad måste ha rang mindre än m. En $m \times n$-matris som innehåller en nollkolonn måste ha rang mindre än n. En $n \times n$-matris (kvadratisk matris) har full rang om och endast om den är radekvivalent med I_n. Enhetsmatriserna $I = I_m$ är ju reducerade trappmatriser från start så rangen av I_m är m.

Av rangdefinitionen följer att rangen av en matris ej ändras vid en radoperation.

Vi noterar också följande viktiga detalj: Om $I \sim B$ så kan B inte innehålla någon nollrad.

- **Lösbarhet och rang.** Vad vi förut sagt om lösbarheten hos ekvationssystem kan nu uttryckas mer precist: Ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbart om och endast om matriserna A (koefficientmatrisen) och $(A \mid \mathbf{b})$ (totalmatrisen) har samma rang. Om systemet är lösbart så har vi oändligt många lösningar om och endast om rangen är mindre än antalet kolonner i A, men entydig lösning om och endast om rangen är lika med antalet kolonner i A (varje kolonn i A är då en pivotkolonn).

  Ett homogent ekvationssystem $A\mathbf{x} = \vec{0}$ är alltid lösbart, eftersom $\mathbf{x} = \vec{0}$ är en lösning. Systemet har bara den lösningen om och endast om alla kolonner i A är pivotkolonner, alltså
$$A \sim \begin{pmatrix} I \\ O \end{pmatrix}$$
  där O som vanligt betecknar en nollmatris. Om A är kvadratisk gäller alltså att $A\mathbf{x} = \vec{0}$ bara har lösningen $\mathbf{x} = \vec{0}$ om och endast om $A \sim I$.

- **Matrisekvationer.** En matrisekvation har utseendet $AX = B$, där A är en given $m \times n$-matris (koefficientmatrisen), B är en given $m \times p$-matris (högerledet) och X är en obekant $n \times p$-matris.

  Låt $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p$ vara kolonnerna i den obekanta matrisen X ($X = (\mathbf{x}_1 \ \cdots \ \mathbf{x}_p)$) och låt $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p$ vara kolonnerna i högerledsmatrisen B ($B = (\mathbf{b}_1 \ \cdots \ \mathbf{b}_p)$). Matrisekvationen $AX = B$ är då lösbar om och endast om alla ekvationssystemen $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1, \ldots, A\mathbf{x}_p = \mathbf{b}_p$, är lösbara (kolonnerna i X utgörs av lösningsvektorerna till dessa system). Precis som för ekvationssystem gäller att $AX = B$ är lösbar om och endast om koefficientmatrisen A och totalmatrisen $(A \mid B)$ har samma rang, alltså om och endast om alla pivotkolonner i $(A \mid B)$ befinner sig i A.

  Lösningsprocessen består i att man först bildar totalmatrisen $(A \mid B)$ och sedan, med utgångspunkt från denna, gör en följd radoperationer tills man får en (helst reducerad) trappmatris $(C \mid H)$. Matrisekvationen är lösbar om och endast om matrisen $(C \mid H)$ **inte** innehåller en rad med useendet $(0 \cdots 0 \mid h_1 \cdots h_p)$, där minst ett av talen $h_1, \ldots, h_p$ är skilt från noll.

  Antag att $AX = B$ och $AX_s = B$. Vi har då att $A(X - X_s) = B - B = O$. Matrisen $X_h = X - X_s$ är alltså en lösning till den homogena matrisekvationen $AX = O$. Omvänt gäller att om X_h är en lösning till $AX = O$ och X_s är en lösning till $AX = B$ så är $X = X_s + X_h$ en lösning till $AX = B$. Det betyder att om X_s är en lösning till $AX = B$ och X_h är den allmänna lösningen till $AX = O$ så ges den allmänna lösningen (d.v.s samtliga lösningar) till $AX = B$ som $X = X_s + X_h$.

- **Exempel.** Lös matrisekvationen $AX = B$, där
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösning. Vi sätter upp totalmatrisen $(A \mid B)$ och gör radoperationer tills vi får en trappmatris:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -15 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -15 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 4 \end{array}\right) = (I \mid H)$$

Matrisekvationen har alltså den unika lösningen

$$X = H = \begin{pmatrix} -15 & -5 \\ -2 & -1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Vi kontrollerar att $X = H$ verkligen löser ekvationen:

$$AH = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -15 & -5 \\ -2 & -1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = B$$

□

- **Exempel (inte så viktigt).** Låt

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -18 & -17 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 20 & -1 \\ 1 & -3 & -5 & -9 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -8 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 25 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 51 & 2 & 4 \\ -16 & 2 & 9 \\ 25 & 5 & 0 \\ 10 & 1 & -3 \\ -11 & -2 & 16 \end{pmatrix}$$

Lös matrisekvationerna $AX = B$ och $AX = O$. Analysera sambanden mellan lösningarna.

Lösning. Vi har

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 5 & -8 & -18 & -17 & 5 & 51 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 20 & -1 & -16 & 2 & 9 \\ 1 & -3 & -5 & -9 & 3 & 25 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -8 & 1 & 10 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -2 & 25 & -1 & -11 & -2 & 16 \end{array}\right)$$

Via ett antal radoperationer (överhoppas!) får vi

$$(A \mid B) \sim (C \mid H) = \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

För den homogena matrisekvationen får vi på samma sätt

$$(A \mid O) \sim (C \mid O) = \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

I båda fallen är samtliga pivotkolonner ($\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ och $\mathbf{c}_5$) i vänsterledet så matrisekvationerna är lösbara. Observera för övrigt att en homogen matrisekvation $AX = O$ alltid är lösbar, ty $X = O$ är ju en lösning. Den obekanta matrisen har tre kolonner; $X = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$. Matrisekvationen $AX = B$ är ekvivalent med de tre ekvationssystemen $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$, $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2$, $A\mathbf{x}_3 = \mathbf{b}_3$, där $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ är kolonnerna i B.

Låt oss titta närmare på ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ ($\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$), vilket har samma lösningar som $C\mathbf{x} = \mathbf{h}_1$, där $\mathbf{h}_1$ är första kolonnen i H: De bundna obekanta är x_1, x_2, x_5, medan x_3 och x_4 är fria. Väljer vi $x_3 = x_4 = 0$ så fås (se $(C \mid H)$) $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ och $x_5 = 6$. En lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ är därför $\mathbf{x}_s = (1, -2, 0, 0, 6)$. Motsvarande homogena system är $A\mathbf{x} = \vec{0}$, vilket har samma lösningar som $C\mathbf{x} = \vec{0}$. Sätter vi $x_3 = t_1$, $x_4 = t_2$ så får vi

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_3 - 3x_4 = 2t_1 - 3t_2 \\ x_2 &= -x_3 - 4x_4 = -t_1 - 4t_2 \\ x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Den allmänna lösningen till det homogena systemet är därför

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_h &= \begin{pmatrix} 2t_1 - 3t_2 \\ -t_1 - 4t_2 \\ t_1 \\ t_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_2 \\ &= \mathbf{v}_1 t_1 + \mathbf{v}_2 t_2 = (\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2) \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Av detta följer att den allmänna lösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ ges av

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_s + \mathbf{x}_h = \mathbf{x}_s + t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

Första kolonnen i den allmänna lösningen till matrisekvationen $AX = B$ har alltså detta utseende. Genom att göra motsvarande för andra- och tredje kolonnen i X kan vi (detaljerna lämnas åt dig som läser detta) dra slutsatsen att matrisekvationen $AX = B$ har den allmänna lösningen

$$X = X_s + X_h = X_s + (\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2)\,t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \end{pmatrix},$$

där $t = (t_{ik})$ är en godtycklig 2×3-matris. Vi kontrollerar att $X = X_s + X_h$ verkligen är en lösning till matrisekvationen $AX = B$:

$$\begin{aligned} AX = AX_s + AX_h &= B + A(\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2)t \\ &= B + (A\mathbf{v}_1\ A\mathbf{v}_2)t \\ &= B + (\vec{0}\ \vec{0})t = B. \end{aligned}$$

□

- **Matrisinverser.** En **högerinvers** till $m \times n$-matrisen A är en $n \times m$-matris X sådan $AX = I_m$. Denna matrisekvation är, som vi sett, lösbar om och endast om matriserna A och $(A \mid I_m)$ har samma rang. Eftersom I_m och därmed $(A \mid I_m)$ har rangen m så betyder det att A har högerinvers om och endast om A har rang m. En följd av detta är att $m \leq n$. Högerinversen är unik om och endast om $m = n$.

  En **vänsterinvers** till $m \times n$-matrisen A är en $n \times m$-matris Y sådan $YA = I_n$, vilket är ekvivalent med att $A^tY^t = I_n$ (Y^t är en högerinvers till A^t). Enligt ovan har därför A en vänsterinvers om och endast om A har rang n, vilket medför att $n \leq m$. Vänsterinversen är unik om och endast om $m = n$.

  Av ovanstående följer att endast kvadratiska ($m = n$) matriser A med full rang kan ha både en högerinvers X och en vänsterinvers Y. Full rang är här detsamma som att $A \sim I_n$. Både högerinversen och vänsterinversen är unika. I själva verket är dessa matriser identiska ty

  $$Y = YI = Y(AX) = (YA)X = IX = X.$$

  Alltså gäller $XA = AX = I$. Den unika matrisen X som har denna egenskap kallas för A:s invers och brukar betecknas som A^{-1}. För att bestämma inversen ska vi lösa matrisekvationen $AX = I$. Detta görs genom att vi bildar $(A \mid I)$ och gör radoperationer tills vi får $(I \mid A^{-1})$. Om det under denna procedur uppstår en rad av formen $0 \cdots 0 \mid \alpha_1 \cdots \alpha_n$ så saknar matrisen invers.

  Av våra tidigare slutsatser följer nu att följande fyra påståenden är ekvivalenta:

  – A är inverterbar.
  – A är radekvivalent med enhetsmatrisen; $A \sim I$.
  – Det homogena ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \vec{0}$ har bara lösningen $\mathbf{x} = \vec{0}$.
  – Ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbart för varje högerled $\mathbf{b}$.

  Antag, till exempel, att det sista påståendet är sant samtidigt som A inte är inverterbar. Då är A radekvivalent med en reducerad trappmatris C, vars sista rad är en nollrad. Bilda nu matrisen $(C \mid \mathbf{h})$, där $\mathbf{h} = (0, \ldots, 0, 1)^T$. Genom att starta med $(C \mid \mathbf{h})$ och i omvänd ordning utföra inverserna av de radoperationer som ledde från A till C får vi matrisen $(A \mid \mathbf{b})$ som svarar mot ett olösbart ekvationssystem.

- **Exempel.** Bestäm, om den existerar, inversen till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösning. Genom ett antal radoperationer, där division undviks, får vi

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 4 & -4 & -4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 4 & -4 & 0 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 4 & -4 & 0 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 4 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

där den sista matrisen har formen $(4I \mid 4A^{-1})$. Det betyder att

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$\square$

- **Exempel.** Låt A vara matrisen i ovanstående exempel. Lös ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$.

Lösning. Av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ följer att

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= I\mathbf{x} = A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} b_1 - 2b_2 + b_3 \\ 2b_1 + 4b_2 - 2b_3 \\ -b_1 - 2b_2 + 3b_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\square$

- **Inversen av en 2×2-matris.** Du bör kunna formeln för inversen av en 2×2-matris:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{t.ex.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Talet $ad - bc$ är matrisens **determinant**, vilket är ett begrepp som vi snart återkommer till.

- **Inversräkneregler.** Bland annat gäller

$$(A^{-1})^{-1} = A, \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

  Här ska, till exempel, den sista regeln tolkas som att matrisen ABC är inverterbar om och endast om alla tre matriserna A, B och C är inverterbara, i vilket fall

$$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}.$$

- **Elementarmatriser.** Eftersom denna fil är tillräckligt stor som den är flyttar vi vår genomgång av dessa till pdf-filen med de kommande fyra föreläsningarna.