

Skrivtid: 14.00–19.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Varje uppgift är värd 5 poäng. Lösningarna ska vara försedda med förklarande text. Skriv läsbart!

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 9 \\x_1 + 2x_2 + x_3 &= 11 \\x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 13\end{aligned}$$

2. För vilka $x \in \mathbb{R}$ är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & 1 \\ -1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & -1 \\ 1 & 0 & -1 & x \end{pmatrix}$$

inverterbar?

3. Bestäm varje matris X som uppfyller

$$A^T X A = B$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Låt $A = (1, 2)$, $B = (4, 1)$, $C = (5, 3)$ och $D = (3, 5)$ vara fyra punkter i planet. Bestäm arean av (den konvexa) fyrhörningen med hörn i dessa punkter.
5. Låt $\mathbf{u} = (1, 2, 0)^T$, $\mathbf{v} = (-3, 4, 1)^T$ och $\mathbf{w} = (1, 0, 1)^T$ vara tre vektorer i rummet. Endast en av följande operationer är väldefinierad:

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \times \mathbf{w}, \quad (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}, \quad (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}.$$

Bestäm den operation som är korrekt och beräkna uttrycket.

6. Låt Π vara planet som innehåller punkterna $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 1)$ och $C = (-1, 4, -1)$. Bestäm avståndet från punkten $D = (2, 1, 0)$ till planet Π .
7. Bestäm standardmatrisen för den ortogonala projektionen på planet $x + 3y - z = 0$.
8. Bestäm en parameterekvation för linjen som utgör skärningen mellan planen $x = 2y$ och $x + y + z = 0$.