UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Styf, 0707-253107

Prov i matematik
Linjär alg. o. g. I
Lärare, KandGeo2
2012-08-22

Skrivtid: 08.00–13.00 . Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Varje uppgift är värd 5 poäng. Lösningarna skall vara försedda med förklarande text. Skriv läsbart!

1. Avgör om vektorn $\mathbf{v} = (1, 3, 5)^T$ kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Låt $A = (1, 1)$, $B = (3, 4)$ och $C = (-2, 3)$ vara tre punkter i planet. Bestäm arean av triangeln med hörn i dessa tre punkter.

3. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
(a) Finn elementarmatriser $E_1,\ E_2,\ E_3$ sådana att $E_3E_2E_1A = I$.
(b) Skriv A som en produkt av elementarmatriser.

4. Låt $A = \begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & x \end{pmatrix}$, där $x \in \mathbb{R}$.
(a) Ange $\text{adj}(A)$.
(b) Beräkna $\det(A)$.
(c) Avgör för vilka x som A är inverterbar och bestäm A^{-1} i sådana fall.

5. Låt L vara linjen som ges av $(x, y, z) = (-1 + t, 2, 2t)$. Vilken punkt P på L är närmast origo? Bestäm även avståndet från P till origo.

6. Linjerna L_1 och L_2 ges av

$$L_1 : (x, y, z) = (0, -t, t) \qquad \text{och} \qquad L_2 : (x, y, z) = (-1 + 2t, t, 1 + 3t).$$

Bestäm avståndet mellan L_1 och L_2.

7. Låt K vara planet $x + y + z = 2$ och låt L vara linjen $(x, y, z) = (-2 + t, 1, -3 + t)$. Bestäm punkten P där K skär L. Bestäm också vinkeln mellan K och L. Vinkeln mellan ett plan och en linje definieras som den minsta vinkeln mellan två vektorer, där den ena ligger i linjen och den andra i planet.

8. Den linjära avbildningen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uppfyller

$$f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1, \quad f(\mathbf{u}_2) = \mathbf{v}_2, \quad \text{och} \quad f(\mathbf{u}_3) = \mathbf{v}_3,$$

där $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ är vektorerna i första problemet och

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestäm f:s standardmatris och avgör om f är inverterbar.