UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Styf

Linjär algebra och geometri I

Lösta problem

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + ay + 3z = 2 \\ ax + y + (a+1)z = 1 \\ 2x + (a+2)y + (2a+2)z = 4 \end{cases}$$

för alla värden på den reella konstanten a.

Lösning.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 3 & 2 \\ a & 1 & a+1 & 1 \\ 2 & a+2 & 2a+2 & 4 \end{array}\right) \overset{\substack{\boxed{2}-\boxed{1} \\ \boxed{3}-a\boxed{1} \\ \boxed{4}-2\boxed{1}}}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a \\ 0 & a & 2a-2 & 2 \end{array}\right).$$

Om $a = 1$, får vi:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \overset{\boxed{1}-\boxed{4}-2\boxed{2}}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right),$$

som betyder att systemet har den entydiga lösningen $(x, y, z) = (-3, 2, 1)$.

Om $a \neq 1$, dividerar vi tredje raden med $1 - a$ och kan fortsätta:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 2a-2 & 2 \end{array}\right) \overset{\substack{\boxed{1}-\boxed{3} \\ \boxed{2}+(1-a)\boxed{3} \\ \boxed{4}-a\boxed{3} \\ \boxed{3}\leftrightarrow\boxed{2}}}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-a & 2-a \\ 0 & 0 & a-2 & 2-a \end{array}\right) \overset{\boxed{4}+\boxed{3}}{\longmapsto}$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-a & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & 4-2a \end{array}\right).$$

Om $a \neq 2$, saknar systemet lösningar. Om $a = 2$, reduceras systemet till

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

och detta system har oändlig många lösningar $(x, y, z) = (-t, 1 - t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. $\square$

2. Betrakta följande fem vektorer i $\mathbb{R}^4$: $\mathbf{a}_1 = (2,1,1,1)$, $\mathbf{a}_2 = (1,1,0,0)$, $\mathbf{a}_3 = (3,1,2,2)$, $\mathbf{a}_4 = (1,1,1,0)$, $\mathbf{a}_5 = (1,0,-2,1)$.

(i) Avgör, för $k = 1, 2, 3, 4, 5,$ om $\mathbf{a}_k$ kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{a}_j$, $j < k$, och bestäm i så fall en sådan linjärkombination. Låt K vara mängden av alla k sådana att $\mathbf{a}_k$ INTE kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{a}_j$, $j < k$. Bestäm K.

(ii) Visa att varje linjärkombination av $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_5$ kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{a}_k$, $k \in K$.

(iii) För vilka värden på den reella konstanten a kan vektorn $v = (3+a, 3, 3+a, 2+2a)$ skrivas som en linjärkombination av $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_5$? Skriv i sådana fall v som en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{a}_k$, $k \in K$.

Lösning. Vi löser alla delarna av uppgiften samtidigt. Låt M vara mängden av alla linjärkombinationer av $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_5$. En vektor $v \in \mathbb{R}^4$ tillhör M omm det finns reella tal $\lambda_1, ..., \lambda_5 \in \mathbb{R}$ sådana att

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3\mathbf{a}_3 + \lambda_4\mathbf{a}_4 + \lambda_5\mathbf{a}_5 = \mathbf{v}$$

Om $v = (3+a, 3, 3+a, 2+2a)$ är detta ekvivalent med att det linjära ekvationssystemet

$$\lambda_1\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}3\\1\\2\\2\end{pmatrix} + \lambda_4\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_5\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+a\\3\\3+a\\2+2a\end{pmatrix} \tag{1}$$

har någon lösning.

Vi löser ekvationssytemet, omskrivet på matrisform, med hjälp av Gausselimination:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3+a \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 3+a \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2+2a \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{1} - \boxed{2} \\ (\boxed{2} \leftrightarrow \boxed{1}) \\ (\boxed{3} - \boxed{2}) \\ \boxed{4} - \boxed{3} \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & a-3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & a-1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \longmapsto \\ \boxed{3} - \boxed{2} \end{array}$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & a-3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & a-1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \longmapsto \\ \\ \boxed{4} + \boxed{3} \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & a-3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \boxed{1} + \boxed{2} \\ -(\boxed{2} + \boxed{3}) \\ \longmapsto \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+2 \end{array}\right) \qquad (*)$$

Detta system är lösbart omm $a + 2 = 0$ dvs. om och endast om $a = -2$. Det följer att

$$v = (3+a, 3, 3+a, 2+2a) \in M \quad \Leftrightarrow \quad a = -2 \quad .$$

Om vi i stället hade tagit $v = (0,\, 0,\, 0,\, 0)$ hade vi haft det homogena ekvationssystemet

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (H)$$

På matrisform

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Efter samma sekvens av radoperationer hade vi fått den reducerade trappmatrisen

$$(C|\vec{0}) = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

vilken svarar mot ekvationssystemet

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (H')$$

Kom ihåg att (H) och (H') har precis samma lösningar. Kolonnerna i C är

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser att $\mathbf{c}_2$ inte är en multipel av $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_3 = 2\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_4$ kan inte skrivas som en linjärkombination av $\mathbf{c}_1,\ \mathbf{c}_2,\ \mathbf{c}_3$, medan $\mathbf{c}_5 = \mathbf{c}_1 + 2\mathbf{c}_2 - 3\mathbf{c}_4$ (kontrollera detta!).

Att $\mathbf{c}_3 = 2\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2$ kan skrivas som $2\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_3 = \vec{0}$ eller

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (H')$$

Det betyder att $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = 0$, $\lambda_5 = 0$ är en lösning till (H') och därför också en lösning till (H). Alltså har vi

$$2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (H)$$

Men det betyder att $2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 = \vec{0}$, d.v.s $\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$, vilket du lätt kan kontrollera. På samma sätt inses att $\mathbf{c}_5 = \mathbf{c}_1 + 2\mathbf{c}_2 - 3\mathbf{c}_4$ är ekvivalent med att $\mathbf{a}_5 = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - 3\mathbf{a}_4$ (vilket du givetvis också skall kontrollera!). Däremot är $\mathbf{a}_2$ ingen multipel av $\mathbf{a}_1$ (för då skulle $\mathbf{c}_2$ vara en multipel av $\mathbf{c}_1$, vilket inte är fallet) och $\mathbf{a}_4$ är ingen linjärkombination av $\mathbf{a}_1$ och $\mathbf{a}_2$ (för då skulle $\mathbf{c}_4$ vara en linjärkombination av $\mathbf{c}_1$ och $\mathbf{c}_2$, vilket inte är fallet). Vi säger att $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ och $\mathbf{a}_4$ är pivotkolonner i matrisen A (och $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_4$ är pivotkolonner i matrisen C). Alltså gäller att $K = \{1,\ 2,\ 4\}$ och

$$\begin{aligned} &\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3\mathbf{a}_3 + \lambda_4\mathbf{a}_4 + \lambda_5\mathbf{a}_5 = \\ &= \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3(2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) + \lambda_4\mathbf{a}_4 + \lambda_5(\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - 3\mathbf{a}_4) = \\ &= (\lambda_1 + 2\lambda_3 + \lambda_5)\mathbf{a}_1 + (\lambda_2 - \lambda_3 + 2\lambda_5)\mathbf{a}_2 + (\lambda_4 - 3\lambda_5)\mathbf{a}_4 \end{aligned}$$

d.v.s varje linjärkombination av $\mathbf{a}_1,\ \ldots,\ \mathbf{a}_5$ kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \mathbf{a}_4$.

Vi återvänder nu till fallet då $\mathbf{v} = (3+a, 3, 3+a, 2+2a)$ och $a = -2$:
Den sista matrisen är då

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (*)$$

De fria obekanta är här λ_3 och λ_5, som alltså kan ges godtyckliga värden. Sätt t.ex. $\lambda_5 = t,\ \lambda_3 = s$ som parametrar. Det följer att $\lambda_4 = 3 + 3t,\ \ \lambda_2 = 2 + s - 2t$ och $\lambda_1 = -2 - 2s - t$. Detta ger alla möjliga lösningar till ekvationssystemet (1) i fallet då $a = -2$. Speciellt, om vi väljer $t = 0,\ s = 0$ får vi lösningen $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 0,\ \lambda_4 = 3,\ \lambda_5 = 0$. Insatt i ekvationen (1) ger detta

$$(-2)\,\mathbf{a}_1 + 2\,\mathbf{a}_2 + 3\,\mathbf{a}_4 = \mathbf{v}$$

om $a = -2$. (Hur syns detta direkt i den sista matrisen?)

Svar: (i) $K = \{1,\ 2,\ 4\}$, $\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_5 = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - 3\mathbf{a}_4$. (ii) Se ovan. (iii) $\mathbf{v} \in M \Leftrightarrow a = -2$. Om $a = -2$: $\mathbf{v} = (-2)\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_4$.

$\square$

3. Betrakta följande fem vektorer i $\mathbb{R}^4$: $\mathbf{a}_1 = (1, -1, 0, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 1, 1, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 3, 1, -3)$, $\mathbf{a}_4 = (1, 2, 3, 1)$, $\mathbf{a}_5 = (1, -1, 2, 4)$.

(i) Avgör, för $k = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,$ om $\mathbf{a}_k$ kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{a}_j$, $j < k$, och bestäm i så fall en sådan linjärkombination. Låt K vara mängden av alla k sådana att $\mathbf{a}_k$ INTE kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{a}_j,\ j < k$. Bestäm K.

(ii) Visa att varje linjärkombination av $\mathbf{a}_1,\ \ldots,\ \mathbf{a}_5$ kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{a}_k,\ k \in K$.

(iii) För vilka värden på den reella konstanten a kan vektorn $\mathbf{v} = (4, a+3, 5, a-4)$ skrivas som en linjärkombination av $\mathbf{a}_1,\ \ldots,\ \mathbf{a}_5$? Skriv i sådana fall v som en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{a}_k,\ k \in K$.

Lösning. Vi löser alla delarna av uppgiften samtidigt, men denna gång lite mer koncentrerat. Låt M vara mängden av alla linjärkombinationer av $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_5$. En vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ tillhör M omm det finns reella tal $\lambda_1, ..., \lambda_5 \in \mathbb{R}$ sådana att

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3\mathbf{a}_3 + \lambda_4\mathbf{a}_4 + \lambda_5\mathbf{a}_5 = \mathbf{v} \quad .$$

Om $\mathbf{v} = (3+a, 3, 3+a, 2+2a)$ är detta är ekvivalent med att det linjära ekvationssystemet

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ a+3 \\ 5 \\ a-4 \end{pmatrix} \tag{2}$$

har någon lösning.

Vi löser ekvationssytemet, på matrisform, med hjälp av Gausselimination

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & -1 & a+3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & 4 & a-4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{2}+\boxed{1} \\ \boxed{4}-\boxed{1} \\ \longmapsto \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 0 & a+7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 3 & a-8 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{2}-3\boxed{3} \\ \boxed{4}+3\boxed{3} \\ \longmapsto \end{array}$$

$$\longmapsto \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -6 & a-8 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 & a+7 \end{array}\right) \begin{array}{c} 2\boxed{4} \\ \boxed{2}\leftrightarrow\boxed{3} \\ \longmapsto \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -6 & a-8 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 18 & 2a+14 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{4}+3\boxed{3} \\ \longmapsto \end{array}$$

$$\longmapsto \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -6 & a-8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5a-10 \end{array}\right) \tag{*}$$

Detta system har någon lösning omm $5a - 10 = 0$ dvs. om och endast om $a = 2$. Det följer att

$$\mathbf{v} = (4, a+3, 5, a-4) \in M \quad \Leftrightarrow \quad a = 2$$

I den sista matrisen har vi pivotelement i kolonn 1, 2 och 4 vilket medför att $K = \{1,\ 2,\ 4\}$.

Antag nu att $a = 2$. Efter att ha multiplicerat tredje raden med $-\frac{1}{6}$ blir den sista matrisen

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{1}-\boxed{3} \\ \boxed{2}-3\boxed{3} \end{array} \longmapsto \ \boxed{1}-2\boxed{2} \ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{**}$$

Analogt med i föregående uppgift kan vi ur (**) avläsa att $\mathbf{a}_3 = -2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ och $\mathbf{a}_5 = 2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4$. Dessutom ser vi att $\lambda_3,\ \lambda_5$ är fria obekanta. Välj t.ex. $\lambda_5 = t,\ \lambda_3 = s$ som parametrar. Det följer att $\lambda_4 = 1 - t,\ \lambda_2 = 2 - s + t$ och $\lambda_1 = -1 + 2s - 2t$. Detta ger alla möjliga lösningar till ekvationssystemet (2) i fallet då $a = 2$. Speciellt, om vi väljer $t = 0,\ s = 0$ får vi lösningen $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 0,\ \lambda_4 = 1,\ \lambda_5 = 0$. Insatt i ekvationen (2) ger detta

$$(-1)\,\mathbf{a}_1 + 2\,\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4 = \mathbf{v}$$

om $a = 2$. (Kontrollera det sista resultatet!)

Svar: (i) $K = \{1,\ 2,\ 4\}$, $\mathbf{a}_3 = -2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_5 = 2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4$. (ii) Se ovan. (iii) $\mathbf{v} \in M \Leftrightarrow a = 2$. Om $a = 2$: $\quad \mathbf{v} = -\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4$. $\square$

4. *For vilka värden på den reella konstanten a är matrisen*

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

inverterbar? Bestäm inversen för dessa a.

Lösning. Vi använder elementära radoperationer ($i : e$ raden betecknas med $\boxed{\text{i}}$).

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & a & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\boxed{1}\leftrightarrow\boxed{4}}{\longmapsto} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & a & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\boxed{2}-\boxed{1} \\ \boxed{3}-\boxed{1} \\ \boxed{4}-a\boxed{1}}}{\longmapsto}$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & a & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 & 1 & 0 & 0 & -a \end{array}\right) \overset{\substack{\boxed{4}+\boxed{2} \\ \boxed{4}+\boxed{3}}}{\longmapsto}$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & a & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3-2a-a^2 & 1 & 1 & 1 & -a-2 \end{array}\right).$$

Eftersom vänstra delen är triangulär, är A inverterbar omm (= om och endast om) alla diagonala element är skilda från noll. Alltså A^{-1} existerar omm $a \neq 1$ och $3 - 2a - a^2 \neq 0$. Ekvationen $3 - 2a - a^2 = -(a-1)(a+3) = 0$ har lösningarna 1 och -3, så A är inverterbar omm $a \neq 1, -3$. För dessa a vi kan fortsätta som följer:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & a & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3-2a-a^2 & 1 & 1 & 1 & -a-2 \end{array}\right) \overset{\substack{(a-1)^{-1}\boxed{2} \\ (a-1)^{-1}\boxed{3} \\ (3-2a-a^2)^{-1}\boxed{3}}}{\longmapsto}$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & a & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{a-1} & 0 & \frac{1}{1-a} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{a-1} & \frac{1}{1-a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{(a+3)(a-1)} & \frac{-1}{(a+3)(a-1)} & \frac{-1}{(a+3)(a-1)} & \frac{a+2}{(a+3)(a-1)} \end{array}\right) \overset{\substack{\boxed{1}-\boxed{2} \\ \boxed{1}-\boxed{3}}}{\longmapsto}$$

$$
\mapsto \left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & a+2 & 0 & \frac{1}{1-a} & \frac{1}{1-a} & \frac{a+1}{a-1} \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{a-1} & 0 & \frac{1}{1-a} \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{a-1} & \frac{1}{1-a} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{(a+3)(a-1)} & \frac{-1}{(a+3)(a-1)} & \frac{-1}{(a+3)(a-1)} & \frac{a+2}{(a+3)(a-1)}
\end{array}\right)
\overset{\substack{\boxed{1}-a\boxed{4} \\ \boxed{2}+\boxed{4} \\ \boxed{3}+\boxed{4}}}{\longmapsto}
$$

$$
\mapsto \left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \frac{a+2}{(a+3)(a-1)} & \frac{-1}{(a+3)(a-1)} & \frac{-1}{(a+3)(a-1)} & \frac{-1}{(a+3)(a-1)} \\
0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{(a+3)(a-1)} & \frac{a+2}{(a+3)(a-1)} & \frac{-1}{(a+3)(a-1)} & \frac{-1}{(a+3)(a-1)} \\
0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{(a+3)(a-1)} & \frac{-1}{(a+3)(a-1)} & \frac{a+2}{(a+3)(a-1)} & \frac{-1}{(a+3)(a-1)} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{(a+3)(a-1)} & \frac{-1}{(a+3)(a-1)} & \frac{-1}{(a+3)(a-1)} & \frac{a+2}{(a+3)(a-1)}
\end{array}\right).
$$

Slutligen, för $a \neq 1, -3$ får vi

$$
A^{-1} = \frac{1}{(a+3)(a-1)} \begin{pmatrix} a+2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & a+2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & a+2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & a+2 \end{pmatrix}.
$$

$\square$

5. Lös matrisekvationen

$$
\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.
$$

Lösning. Vi ska alltså lösa matrisekvationen $AX = B$, där

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.
$$

Om A är inverterbar, har ekvationen en entydig lösning, nämligen $X = A^{-1}B$. För att bestämma om A är inverterbar, använder vi klassiska algoritmen (Jacobis metod).

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\overset{\boxed{1}\leftrightarrow\boxed{2}}{\longmapsto}
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\overset{\boxed{2}-2\boxed{1}}{\longmapsto}
$$

$$
\mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -3 & -2 & 1 & -2 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\overset{\boxed{2}\leftrightarrow\boxed{3}}{\longmapsto}
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
0 & -3 & -2 & 1 & -2 & 0
\end{array}\right)
\overset{\substack{\boxed{1}-2\boxed{2} \\ \boxed{3}+3\boxed{2}}}{\longmapsto}
$$

$$
\mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & -3 & 0 & 1 & -2 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 4 & 1 & -2 & 3
\end{array}\right)
\overset{\frac{1}{4}\boxed{3}}{\longmapsto}
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & -3 & 0 & 1 & -2 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/2 & 3/4
\end{array}\right)
\overset{\substack{\boxed{1}+3\boxed{4} \\ \boxed{3}-2\boxed{4}}}{\longmapsto}
$$

$$
\mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 3/4 & -1/2 & 1/4 \\
0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 & -1/2 \\
0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/2 & 3/4
\end{array}\right).
$$

Vi får att A är inverterbar och

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/2 & 1/4 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 3/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vi sätter in A^{-1} i formeln $X = A^{-1}B$ och får

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & 9 \\ 0 & -6 & 6 & -14 \\ -2 & 3 & -5 & 15 \end{pmatrix}.$$

□

6. Skriv matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 8 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

som en produkt av elementära matriser och en reducerad trappmatris.

Lösning. Vi gör radoperationer tills vi får en reducerad trappmatris R. Varje radoperation svarar mot en elementarmatris E_j, $j = 1, \ldots, k$. Den sökta produkten ges av

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_k^{-1}R$$

Till verket:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 8 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} - \boxed{3} \\ \boxed{3} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} - \boxed{1} \\ \boxed{3} - 3\boxed{1} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & 5 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} - 2\boxed{2} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} + 3\boxed{3} \\ \boxed{3} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \boxed{1} - 3\boxed{2} \\ (\boxed{2} \leftrightarrow \boxed{3}) \\ \boxed{3} - 2\boxed{2} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \boxed{1} - 2\boxed{2} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R$$

Vi avläser i tur och ordning elementarmatriserna

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad E_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_5 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad E_5^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Den sökta produkten är

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1}E_5^{-1}R$$

□

7. Finn a_1, a_2, a_3, ej alla 0, sådana att $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 = 0$ under förutsättning att systemet

$$\begin{cases} x + 2y - z = b_1 \\ 2x - y + 2z = b_2 \\ x + 7y - 5z = b_3 \end{cases}$$

är lösbart.

Lösning. Vi skriver systemet på matrisform och gör radoperationer tills vi får en trappmatris:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & b_1 \\ 2 & -1 & 2 & b_2 \\ 1 & 7 & 5 & b_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & b_1 \\ 0 & -5 & 4 & -2b_1+b_2 \\ 0 & 5 & -4 & -b_1+b_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & b_1 \\ 0 & -5 & 4 & -2b_1+b_2 \\ 0 & 0 & 0 & -3b_1+b_2+b_3 \end{array}\right)$$

Vi ser att systemet är lösbart om och endast om $-3b_1+b_2+b_3 = 0$. Alltså kan vi ta $a_1 = -3$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$ (eller, allmännare $a_1 = -3t$, $a_2 = t$, $a_3 = t$ där $t \neq 0$). □

8. a) Finn alla matriser som kommuterar med matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Finn alla matriser som kommuterar med matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Kunde man förutse att resultaten i a) och b) blir samma utan att lösa dessa uppgifter? Bevisa ditt påstående.

Lösning. a) En matris $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ kommuterar med A omm

$$AC = CA$$

dvs omm

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Genom att utföra matrismultiplikationerna får vi villkoret

$$\begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ -a+2c & -b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-b & a+2b \\ 2c-d & c+2d \end{pmatrix},$$

vilket är ekvivalent med det linjära ekvationssystemet

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2a & + & c & = & 2a & - & b \\ 2b & + & d & = & a & + & 2b \\ -a & + & 2c & = & 2c & - & d \\ -b & + & 2d & = & c & + & 2d \end{array} \right. ,$$

som reduceras till $c = -b$ och $d = a$. Det följer att alla matriser som kommuterar med matrisen A är på formen

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

där a och b är godtyckliga tal.

b) och c) Vi observerar att $B = A - 2E$, där E är enhetsmatrisen av ordning två. Matrisen E kommuterar med alla kvadratiska matriser av ordning två. Om nu en matris X kommuterar med A, dvs om $XA = AX$ så får vi

$$\begin{array}{rcll} XB & = & X(A-2E) & \\ & = & XA - 2XE & \\ & = & AX - 2XE & (\text{ty } XA = AX) \\ & = & AX - 2EX & (\text{ty } XE = EX) \\ & = & (A-2E)X & \\ & = & BX & \end{array}.$$

Alltså $XB = BX$ dvs X kommuterar även med matrisen B.

Eftersom $A = B + 2E$ leder samma sorts resonemang till att $XB = BX$ medför $XA = AX$.

Alltså: X kommuterar med A omm X kommuterar med B. □

9. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & x \\ -1 & 2 & x & 3 \\ 3 & x & 2 & -1 \\ x & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Lösning. (Obs! "t" betyder "transponera")

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & x \\ -1 & 2 & x & 3 \\ 3 & x & 2 & -1 \\ x & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{\boxed{1}+\boxed{2} \\ \boxed{1}+\boxed{3} \\ \boxed{1}+\boxed{4}}}{=} \begin{vmatrix} x+4 & x+4 & x+4 & x+4 \\ -1 & 2 & x & 3 \\ 3 & x & 2 & -1 \\ x & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x+4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & x & 3 \\ 3 & x & 2 & -1 \\ x & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{“t”}}{=} (x+4)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & x \\ 1 & 2 & x & 3 \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{\boxed{1}-\boxed{4} \\ \boxed{2}-\boxed{4} \\ \boxed{3}-\boxed{4}}}{=}$$

$$(x+4)\begin{vmatrix} 0 & -4 & 4 & x-2 \\ 0 & -1 & x+1 & 1 \\ 0 & x-3 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}^{K1} = -(x+4)\begin{vmatrix} -4 & 4 & x-2 \\ -1 & x+1 & 1 \\ x-3 & 3 & -3 \end{vmatrix} \overset{\text{“t”}}{=}$$

$$= -(x+4)\begin{vmatrix} -4 & -1 & x-3 \\ 4 & x+1 & 3 \\ x-2 & 1 & -3 \end{vmatrix} \overset{\substack{\boxed{3}+\boxed{1} \\ \boxed{2}+\boxed{1}}}{=} -(x+4)\begin{vmatrix} -4 & -1 & x-3 \\ 0 & x & x \\ x-6 & 0 & x-6 \end{vmatrix} =$$

$$= -(x+4)x(x-6)\begin{vmatrix} -4 & -1 & x-3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(x+4)x(x-6)(-4-1-x+3) =$$

$$= -(x+4)x(x-6)(-2-x).$$

Och vi får slutligen lösningarna $x_1 = -4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 6$, $x_4 = -2$. □

10. Visa att

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix} = \frac{(x+1)^n + (x-1)^n}{2}$$

där ovanstående determinant är av ordning n.

Lösning. Låt D_n beteckna determinanten i uppgiften (denna determinant är av ordning n). Genom att addera den sista kolonnen till den första (vilket lämnar determinanten oförändrad) får vi att

$$D_n = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & 1 \\ 0 & x & 1 & . & . & . & 1 & 1 \\ 0 & -1 & x & . & . & . & 1 & 1 \\ . & . & . & & & & . & . \\ . & . & . & & & & . & . \\ . & . & . & & & & . & . \\ 0 & -1 & -1 & . & . & . & x & 1 \\ x-1 & -1 & -1 & . & . & . & -1 & x \end{vmatrix}^{\text{K 1}} =$$

$$= (x+1)D_{n-1} + (-1)^{n+1}(x-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 & 1 \\ x & 1 & . & . & . & 1 & 1 \\ -1 & x & . & . & . & 1 & 1 \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ -1 & -1 & . & . & . & x & 1 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} . \qquad (1)$$

För att beräkna den determinant av ordning $n-1$ som vi nu har fått subtraherar vi den sista kolonnen från alla de andra och ser att

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 & 1 \\ x & 1 & . & . & . & 1 & 1 \\ -1 & x & . & . & . & 1 & 1 \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ -1 & -1 & . & . & . & x & 1 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 \\ x-1 & 0 & . & . & . & 0 & 1 \\ -2 & x-1 & . & . & . & 0 & 1 \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ -2 & -2 & . & . & . & x-1 & 1 \end{vmatrix}^{\text{R1}}_{(n-1)\times(n-1)} =$$

$$= (-1)^{1+(n-1)} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ -2 & x-1 & 0 & . & . & . & 0 \\ -2 & -2 & x-1 & . & . & . & 0 \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ -2 & -2 & -2 & . & . & . & x-1 \end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)} = (-1)^n (x-1)^{n-2}. \qquad (2)$$

Likheterna (1) och (2) tillsammans ger oss

$$\begin{aligned} D_n &= (x+1)\,D_{n-1} + (-1)^{n+1}(x-1)\cdot(-1)^n(x-1)^{n-2} = \\ &= (x+1)\,D_{n-1} + (-1)^{2n+1}(x-1)^{n-1} = \\ &= (x+1)\,D_{n-1} - (x-1)^{n-1} \qquad . \end{aligned}$$

På detta sätt får vi för alla $n \geq 2$ sambandet

$$D_n = (x+1)\,D_{n-1} - (x-1)^{n-1} \qquad . \qquad (3)$$

Vi bevisar nu att

$$D_n = \frac{(x+1)^n + (x-1)^n}{2}$$

med hjälp av induktion på n.

Vi har $D_1 = x = \dfrac{(x+1)^1 + (x-1)^1}{2}$ vilket visar att påståendet är sant för $n = 1$. Vi antar att påståendet är sant för $n = k$ (något $k \geq 1$) dvs. att

$$D_k = \frac{(x+1)^k + (x-1)^k}{2}$$

gäller (induktionsantagande). Vi får då

$$\begin{aligned}
D_{k+1} &= [\text{sambandet (3) för } n = k+1\,] = (x+1)D_k - (x-1)^k = \\
&= [\text{från induktionsantagandet}] = (x+1) \cdot \frac{(x+1)^k + (x-1)^k}{2} - (x-1)^k = \\
&= \frac{(x+1)^{k+1} + (x+1)(x-1)^k - 2(x-1)^k}{2} = \\
&= \frac{(x+1)^{k+1} + (x+1-2)(x-1)^k}{2} = \\
&= \frac{(x+1)^{k+1} + (x-1)^{k+1}}{2} \qquad ,
\end{aligned}$$

vilket visar att påståendet är då sant även för $n = k+1$.

Enligt induktionsprincipen visar detta att

$$D_n = \frac{(x+1)^n + (x-1)^n}{2}$$

för alla $n \geq 1$. □

11. Låt Π vara planet med ekvationen $x + 2y - 2z = 5$. Skriv vektorn $\vec{u} = (-1, 2, 3)$ som en summa $\vec{u} = \vec{p} + \vec{q}$, där $\vec{p}$ är parallell med Π och $\vec{q}$ är vinkelrät mot Π.

Lösning. En normal till planet är $\vec{n} = (1, 2, -2)$. Vektorn $\vec{q}$ är projektionen av $\vec{u}$ på $\vec{n}$. Alltså har vi

$$\vec{q} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n} = \frac{-3}{9}(1, 2, -2) = \frac{1}{3}(-1, -2, 2),$$

vilket ger

$$\vec{p} = \vec{u} - \vec{q} = \frac{1}{3}(-3, 6, 9) + \frac{1}{3}(1, 2, -2) = \frac{1}{3}(-2, 8, 7)$$

Här är det lämpligt att kontrollera att $\vec{p} \perp \vec{q}$:

$$9\vec{p} \cdot \vec{q} = 2 - 16 + 14 = 0.$$

□

12. Då punkterna $A_1(2, -1, 1)$, $B_1(3, 1, 1)$, $C_1(3, 0, 0)$ projiceras ortogonalt på planet Π i föregående uppgift får man punkterna A, B respektive C. Bestäm arean av triangeln ABC.

Lösning. Planet Π_0 med ekvationen $x+2y-2z=0$ är parallellt med Π. Om A', B' C' är projektionerna på Π_0 av A_1, B_1 respektive C_1 kommer därför triangeln $A'B'C'$ att ha samma area som triangeln ABC. Från studieanvisningarna vet vi att projektionen $\vec{p}$ av vektorn $\vec{u}$ på planet (genom origo) med ekvationen $ax+by+cz=0$ ges av $\vec{p}=P\vec{u}$, där

$$P=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

och vektorerna representeras som kolonnmatriser. Här gäller alltså att

$$P=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Låt $\vec{u}_1=\overrightarrow{A_1B_1}=(1,2,0)$ och $\vec{v}_1=\overrightarrow{A_1C_1}=(1,1,-1)$. Sätt

$$\vec{u}'=\overrightarrow{A'B'}=P\vec{u}_1=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

och

$$\vec{v}'=\overrightarrow{A'C'}=P\vec{v}_1=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Arean av triangeln $A'B'C'$ är $|\vec{u}'\times\vec{v}'|/2$. Vi har

$$\vec{u}'\times\vec{v}'=\frac{1}{81}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 8 & 10 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{81}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 9 & 9 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{9}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{9}(2,-4,4)$$

Den sökta arean α är därför

$$\alpha=\frac{1}{2}|\vec{u}'\times\vec{v}'|=\frac{1}{18}\sqrt{4+16+16}=\frac{1}{3}.$$

Alternativt inser man (hur då?) att

$$\pm\alpha=\frac{1}{2|\vec{n}|}\,\vec{n}\cdot(\vec{u}_1\times\vec{v}_1)=\frac{1}{2\sqrt{1+4+4}}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

där $\vec{n}=(1,2,-2)$ är planets normal. □

13. Bestäm en ekvation för planet genom punkterna $P_0(-2,3,1)$, $P_1(1,-1,1)$, $P_2(-1,4,2)$. Visa att planet inte går genom origo och bestäm avståndet från punkten $P_3(-7,2,4)$ till planet.

Lösning. Planets ekvation på determinantform är

$$0 = \begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \\ z - z_0 & z_1 - z_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x + 2 & 3 & 1 \\ y - 3 & -4 & 1 \\ z - 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4x - 3y + 7z - 6$$

En ekvation för planet är alltså $4x+3y-7z+6 = 0$. Origo ligger inte i planet ty $x = y = z = 0$ satisfierar inte planets ekvation. Avståndet från punkten $P_3(-7, 2, 4)$ till planet är

$$D = \frac{|ax_3 + by_3 + cz_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{| - 28 + 6 - 28 + 6|}{\sqrt{16 + 9 + 49}} = 44/\sqrt{74}.$$

□