UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Bo Styf

Linjär algebra I
distans
Vårterminen 2009

Lösningar till tentamen i linjär algebra och geometri I, 2009–04–25

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} \phantom{x_1 +{}} x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 4 \\ 5x_1 - 2x_2 - 7x_3 + 12x_4 - 7x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = -1 \end{cases}$$

Lösning. Vi sätter upp systemet på matrisform och gör radoperationer tills vi får en reducerad trappmatris:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 5 & -2 & -7 & 12 & -7 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De två första kolonnerna är pivotkolonner så vi sätter $x_3 = t_1$, $x_4 = t_2$, $x_5 = t_3$, vilket ger lösningen

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + t_1 - 2t_2 + t_3 \\ 2 - t_1 + t_2 - t_3 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

där t_1, t_2, t_3 är godtyckliga reella tal. □

2. (a) Bestäm inversen till matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

(b) Lös matrisekvationen

$$A^T \cdot X \cdot A = D, \quad \text{där} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösning. (a) Med standardmetoden för matrisinvertering får vi

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Alltså har vi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Genom att multiplicera ekvationen $A^T \cdot X \cdot A = D$ till vänster med $(A^{-1})^t$ och till höger med A^{-1} så får vi

$$\begin{aligned} X &= (A^{-1})^t D A^{-1} \\ &= (A^{-1})^t \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Eftersom $((A^{-1})^t D A^{-1})^t = (A^{-1})^t D A^{-1}$ måste X vara en symmetrisk matris. Man får inte missa att kontrollera sådana detaljer!

□

3. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} x & -2 & 1 & 0 \\ -1 & x & -3 & 3 \\ 1 & 0 & x & 2 \\ 0 & 2 & -1 & x \end{vmatrix} = 0.$$

Lösning. Genom successiva rad- och kolonnoperationer, som inte förändrar värdet på determinanten, samt utveckling efter lämplig rad eller kolonn, får vi

$$
\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} x & -2 & 1 & 0 \\ -1 & x & -3 & 3 \\ 1 & 0 & x & 2 \\ 0 & 2 & -1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1-x^2 & -2x \\ & x & x-3 & 5 \\ 1 & 0 & x & 2 \\ 0 & 2 & -1 & x \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -2 & 1-x^2 & -2x \\ x & x-3 & 5 \\ 2 & -1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -x^2 & -x \\ x & x-3 & 5 \\ 2 & -1 & x \end{vmatrix} \\
&= (-x) \begin{vmatrix} 0 & x & 1 \\ x & x-3 & 5 \\ 2 & -1 & x \end{vmatrix} = (-x) \\
&= (-x) \begin{vmatrix} x & -4x-3 \\ 2 & -1-x^2 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & 4x+3 \\ 2 & x^2+1 \end{vmatrix} \\
&= x(x^3+x-8x-6) = x(x^3-7x-6) = x(x+1)(x^2-x-6) \\
&= x(x+1)(x+2)(x-3).
\end{aligned}
$$

Det är nu lätt att avläsa ekvationens rötter $x = 0, -1, -2, 3$. □

4. Bestäm en ekvation för planet Π som går genom punkterna $P_0 = (1,0,3)$, $P_1 = (2,4,0)$ och är parallellt med skärningslinjen mellan planen $x + 2y - 2z = 4$ och $3x + 4y = 2$.

Lösning. Vektorn från P_0 till P_1 är $\mathbf{v}_1 = (1,4,-3)$. De båda planen har normalvektorerna $\mathbf{n}_1 = (1,2,-2)$ respektive $\mathbf{n}_2 = (3,4,0)$. En vektor som är parallell med skärningslinjen mellan planen är därför $\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_1 = (-8,6,2)$. Detsamma gäller för vektorn $\mathbf{v}_2 = (-4,3,1)$. Eftersom planet Π går genom punkten $P_0 = (1,0,3)$ och är parallellt med $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ ges dess ekvation på determinantform av

$$
0 = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -4 \\ y & 4 & 3 \\ z-3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 13(x-1) + 11y + 19(z-3).
$$

□

5. Ange för vilka värden på den reella konstanten a som ekvationssystemet

$$
\begin{cases} x + (a+1)y + z = 1 \\ 2x - 5y + 2z = 2 \\ x + y - az = 3 \end{cases}
$$

(i) saknar lösning,

(ii) har oändligt många lösningar,

(iii) har en unik lösning. (Observera att systemet ej behöver lösas.)

Lösning. Vi skriver systemet på matrisform och gör elementära radoperationer:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a+1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -a & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2a+2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2a & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2a-3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2a-2 & 4 \end{array}\right)$$

Här får vi dela upp i två fall: Om $a = \frac{3}{2}$ så blir den sista matrisen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -5 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & -19 & 26 \\ 0 & 3 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Då detta är en trappmatris av rang 2 följer att systemet har oändligt många lösningar. Om i stället $a \neq \frac{3}{2}$ så gäller

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2a-3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2a-2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2a+2 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & -2 \end{array}\right)$$

Om $a = -1$ svarar tredje raden i den högra matrisen mot den orimliga ekvationen $0 = -2$ så systemet saknar lösningar. Om slutligen $a \neq -1$ har koefficientmatrisen rang tre så systemet har en entydig lösning.

Svar.

(i) Systemet saknar lösning då $a = -1$.

(ii) Systemet har oändligt många lösningar då $a = \frac{3}{2}$

(iii) För övriga $a \in \mathbb{R}$ har systemet en unik lösning.

□

6. L är den räta linjen $(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(-3, 1, 2)$ och $\mathbf{w} = \overrightarrow{AB}$,där $A = (1, 0, 3)$, $B = (2, 4, 0)$. Skriv vektorn $\mathbf{w}$ som en summa $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, där $\mathbf{u}$ är parallell med L och $\mathbf{v}$ är vinkelrät mot L.

Lösning. Låt $\mathbf{a} = (-3, 1, 2)$. Då gäller att $\mathbf{u}$ är projektionen av $\mathbf{w} = (1, 4, -3)$ på $\mathbf{a}$, alltså

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}\,\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{w}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{-5}{14}$$

och

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} - \mathbf{u} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 14 \\ 56 \\ -42 \end{pmatrix} - \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 15 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -1 \\ 61 \\ -32 \end{pmatrix}$$

□

7. Bestäm standardmatrisen för den linjära avbildning T som geometriskt kan beskrivas som speglingen i planet $4x - y - z = 0$. Ange även en nollskild vektor $\mathbf{v}$ sådan att $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$.

Lösning. Låt $\mathbf{n} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$ (planets normalvektor). För en godtycklig vektor $\mathbf{v}$ gäller då att $\mathbf{w} = T(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2\mathbf{q}$, där $\mathbf{q}$ är projektionen av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{a}$. Vi har

$$\mathbf{q} = \mathbf{n}\,\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}} = \frac{1}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\,\mathbf{n}\,\mathbf{n}^t\mathbf{v} = Q\mathbf{v},$$

där

$$Q = \frac{1}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\,\mathbf{n}\,\mathbf{n}^t = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}(4\ \ -1\ \ -1) = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 16 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = Q^2.$$

Om vi betecknar T:s standardmatris med S gäller alltså

$$\begin{aligned} S\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) &= \mathbf{v} - 2Q\mathbf{v} = (I - 2Q)\mathbf{v} \\ &= \frac{1}{9}\left(\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)\mathbf{v} \\ &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & -1 \\ 4 & -1 & 8 \end{pmatrix}\mathbf{v}, \end{aligned}$$

vilket betyder att T:s standardmatris är

$$S = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & -1 \\ 4 & -1 & 8 \end{pmatrix} = S^{-1} = S^t.$$

□

8. Låt $OABC$ vara tetraedern med O i origo och hörnen $A,\ B,\ C$ i punkterna $(1,2,1)$, $(0,3,2)$ respektive $(4,1,1)$. Bestäm längden av den höjd som går från hörnet C vinkelrätt mot sidoytan OAB. (*Volymen av en tetraeder är $V = Bh/3$, där B är basytan och h är höjden.*)

Lösning. För volymen har vi

$$V = |OAB|\,h = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB})\cdot \overrightarrow{OC}\,|,$$

där $|OAB| = \frac{1}{2}|\,\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB})|$ är arean av triangeln OAB. Eftersom

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & 1 & 0 \\ \mathbf{j} & 2 & 3 \\ \mathbf{k} & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

så gäller $(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC} = 5$ och

$$\frac{5}{6} = |OAB|\, h = \frac{1}{2}\sqrt{1+4+9}\, h = \frac{\sqrt{14}}{2}\, h,$$

vilket ger

$$h = \frac{2 \cdot 5}{6\sqrt{14}} = \frac{5}{3\sqrt{14}}.$$

□