Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Bo Styf

Prov i matematik
Linj. alg. o geom. 1
2011-05-07

Tentamenstid: 14.00 - 19.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. För betyget 3 krävs 18 poäng (av 24) på del A. För betyget 4 krävs 18 poäng på del A och 25 poäng totalt. För betyget 5 krävs 18 poäng på del A och 32 poäng totalt.

Del A

1. För vilka värden på a är ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ 2x + (a-1)y = 2a \end{cases}$$

lösbart? (2)

2. Bestäm, när den existerar, inversen till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & a-1 \end{pmatrix}$$ (2)

3. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$ (2)

4. Bestäm arean av triangeln med hörn i punkterna $(-1,0)$, $(1,2)$ och $(2,1)$. (2)

5. Bestäm arean av triangeln med hörn i punkterna $(0,-1,0)$, $(1,1,2)$ och $(1,2,3)$. (2)

6. Låt L vara linjen med ekvationen $x + 2y = 0$. Skriv vektorn $\mathbf{w} = -4\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ som en summa $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, där $\mathbf{u}$ är parallell med L och $\mathbf{v}$ är vinkelrät mot L. (2)

7. Låt L vara linjen i föregående uppgift. Bestäm avståndet från punkten $(-4,7)$ till L. (2)

8. Låt Π vara planet med ekvationen $x + y - z = 0$. Bestäm avståndet från punkten $(2,2,1)$ till Π. (2)

9. Π är planet i föregående uppgift. Vilken punkt på Π ligger närmast punkten $(2,2,1)$? (2)

10. Bestäm elementära matriser E_1, E_2, E_3 sådana att

$$E_3E_2E_1A = I \quad \text{där} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$ (2)

11. Bestäm en ekvation för planet, genom origo, som innehåller linjen $x - 1 = y = z$. (2)

12. Bestäm en ekvation för planet genom punkterna $(-1,0,0)$, $(0,1,0)$ och $(0,0,-1)$. (2)

Del B

13. (a) Visa att matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

är inverterbar och bestäm inversen A^{-1}.

(b) Lös matrisekvationen

$$X \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

14. Låt L_1 vara skärningslinjen mellan planen $x + z = 1$ och $y - z = -2$. Låt L_2 vara skärningslinjen mellan planen $x + y = 3$ och $y + z = 2$. Bestäm avståndet mellan L_1 och L_2. (4)

15. Π är planet med ekvationen $x - y - z = 1$ och $\mathbf{w} = \overrightarrow{AB}$, där $A = (1, 0, 3)$, $B = (2, 1, 0)$. Skriv vektorn $\mathbf{w}$ som en summa $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, där $\mathbf{u}$ är parallell med Π och $\mathbf{v}$ är vinkelrät mot Π. (4)

16. Bestäm standardmatrisen för den linjära avbildning T som geometriskt kan beskrivas som speglingen i planet $x - y - 2z = 0$. Bestäm alla vektorer $\mathbf{v}$ sådana att $T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$. (4)