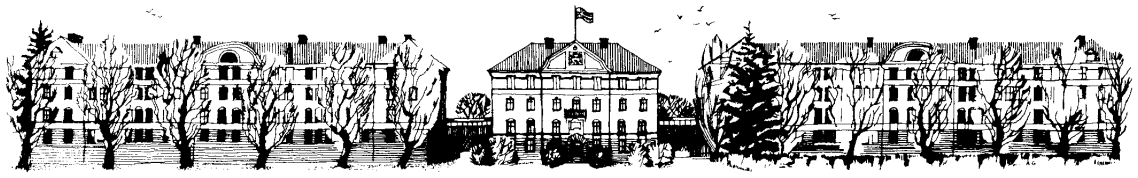
Jubileumsskrift

Arne Beurling

100 år

U.U.D.M. Report 2007:34
ISSN 1101–3591



Department of Mathematics

Uppsala University

Innehåll

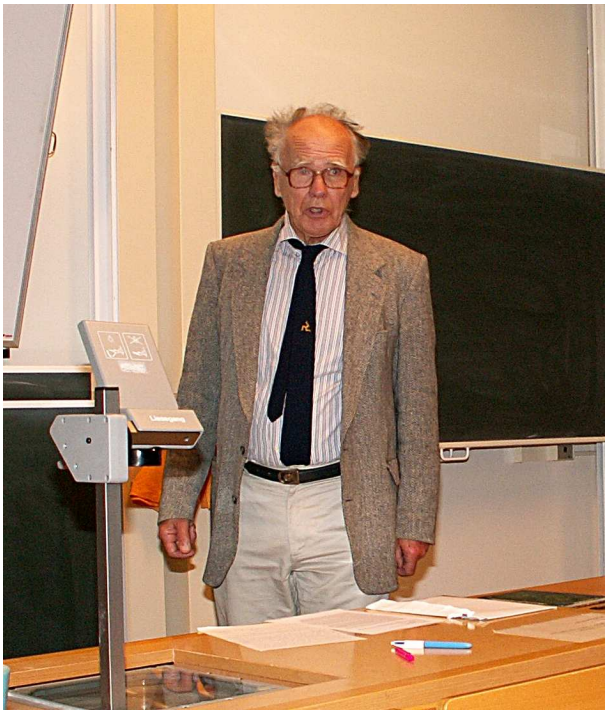
Fredagen den 4 november 2005 hölls ett symposium på Matematiska institutionen vid Uppsala universitet med anledning av att det detta år var 100 år sedan Arne Beurling föddes. (Symposiet hölls av praktiska skäl inte på Beurlings födelsedag; däremot var det exakt 82 år sedan hans disputation den 4 november 1933.)
Vid symposiet avtäckte universitetets prorektor Lena Marcusson en byst av Arne Beurling, skulpterad av konstnärerna Ylva Lindgren och Jan-Erik Björk som också var närvarande.

Fyra föredrag hölls om Beurlings verksamhet, både som matematiker och som kodknäckare. Föredragen återges i redigerad form i denna skrift. En av föredragshållarna var Beurlings elev och efterträdare Lennart Carleson. Vid symposiet deltog också ytterligare två av Beurlings elever: Yngve Domar och Sonja Lyttkens.

Anders Öberg Svante Janson Anders Källström

A mathematical genius

Lennart Carleson



Let me begin with a few biographical facts. Arne Beurling was born in Gothenburg on February 3, 1905 and died in Princeton, N.J. on November 20, 1986. He studied in Uppsala. He recognized Wiman and Holmgren as his teachers but he was very independent. The main result of his thesis – the proof of the Denjoy conjecture concerning asymptotic values of an entire function – was obtained in 1929. Instead of publishing he went crocodile hunting with his father and in this way left to Lars Ahlfors to be the first to prove the conjecture (1929). The thesis was submitted only 1933, actually on today's date. He was professor in Uppsala 1937–1954 and was then permanent member of the Institute for Advanced Study in Princeton.

Among his honors I should mention that Vetenskapssocieteten in Uppsala awarded him its first Celsius medal in mathematics 1961.

Somewhere in his collected papers Lars Ahlfors writes about Beurling: "*there was a streak of genius in everything he did*". I support this statement strongly. I would not use the word genius for many mathematicians that I met but Beurling is one of them.

When we do mathematics most of us use only the intellectual 50% of the brain and keep the emotional side idle. For Arne Beurling the world of mathematics was somehow integrated with the real world and with life itself and his brain was 100% active. This seemed to give him access to information that was hidden for the rest of us and this can only be described as related to mysticism. You will hear about his work on the German cipher-machine during World War II and you can form your own opinion. If this gives you the impression of a dreamer and a person removed from everyday life this is completely wrong. Arne Beurling was physically very strong, had a decisive manner and was quite practical. I like to think of him as very Swedish, as part of Swedish nature with its deep forests, lakes and mountains, in which you also find fairies and trolls. This emotional relation to mathematics explains why he judged mathematical results in terms of beauty rather than, or even opposed to, complexity. He wrote his papers as pieces of art and was anxious to hide as well as possible how he found his results. If you would ask him he would say: "a magician does not reveal his secrets". A favorite anecdote of mine concerns a very involved proof I had found and showed him. I knew of course that he would never read it but I was a little proud. He came back a few day later and said: "This reminds me of a cartoon (and I have to tell the rest in Swedish). Kolingen står i Katarinahissen och tittar ner på Slussen och säger: den som hittade på detta måste ha tarmar i hjärnan."

This emotional attitude to his mathematics created a very complicated relation to a number of fellow mathematicians concerning their presumed misuse of his results. Reading about Newton one is struck by the similarities in attitude. Like Newton, Beurling had a period of extreme productivity. In his case, it was during the late part of the 1930's, but he certainly continued to produce outstanding results all through his life. The famous Beurling–Malliavin theorem on closure of exponentials is from a later period as is the theory of Dirichlet spaces.

Towards us as his students he was always extremely generous and helpful. Here is a list of his Ph.D. students:

Carl-Gustav Esseen 1944;
Göran Borg 1945;
Arne Broman 1947;
Bo Kjellberg 1948;
Lennart Carleson 1950;
Tord Hall 1950;
Bertil Nyman 1950;
John Wermer 1951;
Sonja Lyttkens 1956;
Yngve Domar 1956.

I have included John Wermer although he defended his thesis at Harvard and Yngve Domar and Sonja Lyttkens defended theirs after Beurling left Sweden. He gave the general topic to us, usually related to his own work, but then interfered only once in a while. Folklore has it that he kept a finished version of his own in his drawer but I am sure this is not right. Two of the theses, by Esseen and by Borg, have been very influential in their respective fields, probability and inverse spectral theory, but I don't know which credit is due to Beurling. I should also like to mention Bo Kjellberg in a special way. Bo was totally loyal and devoted to Beurling. Through the years he made every effort to support Beurling and to remove obstacles for him.

We learned much on mathematical research through Beurling's seminars. They took place every second Tuesday, 6–8 PM, when Beurling invariably would talk about his own work (he did not read much). The department was at Trädgårdsgatan 18 and he would usually work at home in number 12 and at night. One should not believe that it all came by divine inspiration. His neighbors would tell how he walked back and forth (the worst being that he sometimes stopped!).

Arne Beurling has had a tremendous influence on modern analysis as Paul Malliavin will no doubt explain. On the practical side: in Sweden he took the initiative to the Swedish mathematical Society. He was offered the directorship of the Mittag-Leffler institute but turned it down (the institute was then in a very discouraging shape) and his reply to the offer is a classic in our circles: "If I want to drink myself to death, I want to choose time and place myself." He left for the US in 1954 for the very prestigious position at IAS in Princeton. He was then very disappointed with Sweden and felt that he was not appreciated here. He could also see signs of the approaching bureaucratization of the university system. A large part of his heart remained here and all through his life he took an interest (usually not with very positive comments) in what went on here. I interpret what we do here today as an overdue "*Thank you for what you have done for Sweden and for Uppsala University in particular*".

Arne Beurling – a visionary mathematician

Paul Malliavin

It is for me a moving experience to be invited to the commemoration of a man who, in 1946, influenced deeply the choice of my field in Mathematics, who, when I met him in 1954, gave me a magnificent example of scientific integrity by his entire commitment to Mathematics and finally who has been kind enough to honor me during thirty years by his unfailing confidence.

I will try to let Beurling's monumental work speak to us. As I would be incompetent for considering all his remarkable contributions, I shall emphasize the Beurling papers on which I have directly worked along my career.

From Nancy to Princeton

I had my first contact with Arne Beurling in 1946, in the library of the Institut Henri Poincaré by reading his eight pages paper in Acta Mathematica 1945 which had just arrived in Paris. This paper combines in a very clever way two branches of mathematical Analysis: real and complex Analysis; by this mixture are obtained striking results, in particular a new proof of the Tauberian theorem of Norbert Wiener.

I was so enthusiastic that I decided to stay some time in Uppsala in order to benefit from the Master teaching.

I went to an international conference in the french town Nancy in 1947, organized by Szolem Mandelbrojt. Arne Beurling delivered a talk which was an elaboration of the 1945 Acta paper: his conference talk started by these words

In Harmonic Analysis of functions there exist two main procedures: the Analysis and the Synthesis. Analysis has the purpose to discover the frequencies of complex exponentials which are hidden in the given function, these frequencies constitute the spectrum of the function.
The Synthesis means a procedure to reconstruct the function using only the frequencies appearing in the spectrum.

Beurling's talk realizes this program for a new class of functions rapidly increasing at infinity; the methodology was a marvelous mixture of complex and real analysis. At the end of the Beurling talk I thought that I must go to Uppsala and work on spectral Synthesis!

But international travel was at this postwar time quite impossible and I stayed in Paris where I defended in 1954 my Thesis which had been kindly accepted for publication by Acta Mathematica; at the same time Jean Leray proposed my name to Marston Morse, Director of the School of Mathematics of the Institute for Advanced Study in Princeton for an invitation to the Institute for the academic year 1954–1955. Beurling, who had just been appointed Permanent Professor at the Institute, arrived in Princeton in the beginning of september; my old dream was realized after eight years!

Princeton was at this time the world wide gathering place of mathematicians. The Director, Robert Oppenheimer was conducting a seminar in theoretical physics, being at the same time Chairman of the American Atomic Energy Commission. The 1954 Nobel prize in Physics has been awarded to two young princetonians. A distinguished group of japanese mathematicians including Kunito Kodaira, Fields medalist 1954, and Kiyosi Itô was hosted by the Institute; everybody was extremly careful to avoid any remark recalling the end of the war where Oppenheimer had played a decisive role.

Exceptional sets

Let us begin by the Beurling paper on *Exceptional sets*, published in 1935. Given a holomorphic function in the unit disk, with finite Dirichlet integral, that is such that the image of the disk covers a finite area, what can be said of the exceptional set of points of the circle where this function becomes infinite? By the 1905 Fatou classical result this exceptional set has zero length. Beurling got the definitive result that this exceptional set has a zero logarithmic capacity, which means that it does not carry any measure of finite electrostatic energy. This paper gives rise in the fifties to the memorable works of Lennart Carleson on exceptional sets on the circle.

I started in the fall 1954 with Beurling to work on the problem: *What is the set of zeroes of a holomorphic function in D, with a finite Dirichlet integral.* We obtained necessary and sufficient conditions solving the problem; Beurling was not fully satisfied with the depth of the paper; he urged me to publish it by myself; I waited ten years, hoping that he wpuld change his mind; finally I published it in an Alta Matematica Conference book in Roma, 1977.

The Beurling Therem has an equivalent statement in terms of Sobolev spaces: a function on the circle belonging to the Sobolev space of order $\frac{1}{2}$ is finite outside a set of zero capacity. Now replace the circle by a euclidean space of dimension d and ask a similar question for any Sobolev exponent, we get a problem which has been studied by many, including for instance the Saint Petersburg school, in the sixties.

In the eighties the same problem appears in Probability Theory for the construction of conditional laws.

In the every day life a man who is facing an uncertain situation is very pleased to get any supplementary information which will decrease the risk of his position. This evidence becomes false in the context of abstract probability theory: supplementary information can increase the risk! Indeed supplementary information leads to conditional law computing; conditional law depends in a non continuous way on the numerical value carrying the new information: as this new information cannot be known with all its decimals, this leads to the impossibility to compute numerical approximation of the needed conditional law.

To reconciliate abstract probability and common sense it is needed to construct regular desintegration of probability law under conditioning; I called this procedure *quasi-sure analysis*; it depends on the study of exceptional sets for Sobolev spaces constructed on the infinite dimensional space constituted by the probability space.

Quasi-sure analysis has been applied to a class of infinite dimensional group of mathematical physics: the Loop Groups.

Dirichlet spaces

Beurling–Deny introduced in two short papers in 1958 and 1959 a fundamental new concept, the *Dirichlet space*. Their objective is to get a general axiomatized theory of classical potential theory. They call *contraction* a map of the complex plane which preserves zero and which diminishes the distances. They make the key observation that the classical Dirichlet integral is diminished by the non linear map constituted by composition with contraction:

$$\mathscr{D}(\phi) = \int \|\nabla\phi\|^2(x)\, d\mu(x);$$
$$\mathscr{D}(T(\phi)) \leq \mathscr{D}(\phi)$$

Beurling–Deny consider an abstract measure space; they suppose given on a dense subset of L^2 a quadratic form $\mathscr{D}$ called the Dirichlet form satisfying the following hypotheses

1) The Dirichlet form is closable in L^2;

ii) The Dirichlet form decreases under the action of contraction.

Under this very simple qualitative assumptions they proved the existence of an associated Markov process and of a fullfledged potential theory, including balayage. This miraculous construction relies on the fact that the hypothesis on the action of contractions implies the positivity of kernels for the associated semi-group.

Arne Beurling showed me the example on the real line of the Douglas integral, which defines the Sobolev norm of order one half:

$$\mathscr{D}(u) = \int_R \int_R \Big(\frac{u(x)-u(y)}{x-y}\Big)^2\, dxdy$$

The closure and the action of contractions are both obvious. What is the underlying Markov process, which is perfectly constructed by the Dirichlet space theory: it is the Markov process defined by the *excursions of the brownian motion*, a theory which needed thirtyfive years of efforts of distinguished probabilists including Paul Lévy and Kiyosi Itô to be established! Yes, indeed the Dirichlet spaces theory has been a revolution in the theory of Markov processes! Let us give some other examples.

The theory of diffusion processes associated to an elliptic operator on R^n in divergence form was established in the seventies in a famous book by Stroock–Varadhan, based on PDE estimates. The 1980 Fukushima book on Dirichlet spaces provides an alternative approach, completely autonomous and working under weaker regularity assumptions.

An advantage of the theory of Dirichlet form is the big flexibility in the choice of the underlying space; for instance a fractal set defined by a regular dissection procedure carries a canonical Dirichlet form and by consequence a canonical Markov process.

Holomorphic functions of several complex variables are not governed by a unique potential theory as in the one complex variable case. Fukushima–Okada (Acta 1986) associated to any bounded plurisubharmonic function a Dirichlet space; for the associated Markov process any holomorphic function gives rise to a martingale; because any pseudo-convex domain can be defined as the set where a well chosen plurisubharmonic function is negative, the Fukushima–Okada process gives a construction of harmonic measures carried by the Shilov boundary.

Remarkable applications of Dirichlet forms appeared in infinite dimensional analysis; in infinite dimension elliptic PDE theory is no more available and Dirichlet space is the only theory available.

In a preprint of Mittag-Leffler Institute, summary of my lectures at "Beurling year" in 1976, printed in Japan in 1978, I constructed a canonical Dirichlet form on the Wiener space (that is the probability space of the Brownian motion) giving rise to the *Stochastic Calculus of Variations*. The book of Bouleau–Hirsch (1991) gives, along these lines, a minimal condition under

which a random variable defined on the Wiener space has a density absolutely continuous relatively to the Lebesgue measure.

Tauberian Theorem with remainder term

In his 1938 paper at the Scandinavian Mathematical Congress, Beurling started, one year before the Doklady Notes of Israel Gelfand, the theory of Banach algebras. He developed the theory in the context of algebras of Fourier transforms of functions integrable for non quasi-analytic weights. He proved in this context the key equality between the spectral radius and the supremum norm. The whole paper culminates in a Tauberian theorem with a remainder term.

I was back in Princeton in the fall 1960. I discussed with Beurling the possibility of revisiting his theory of generalized primes numbers (1937) in the light of Tauberian theorems with remainder which was at this time actively developed in Uppsala by former Beurling students; as a result I published alone in Acta 1961 a paper giving for generalized primes a remainder term almost as good as the best estimate known by specialists in analytic number theory.

Spectral synthesis

In his Acta 1949 paper *On the spectral synthesis of bounded functions*, Beurling raises the question to find the integrable positive weights for which the Spectral Synthesis holds true for a function in L^∞ relatively to the topology defined by the L^1 norm for the weighted Lebesgue measure. Beurling obtained the following very simple result that *any weight which is even and decreasing is admissible*. The main ingredient of the proof is the use of contractions inside the Wiener algebra of Fourier transforms of functions of L^1. It is for me a mystery the intellectual process which lead Beurling to introduce in spectral synthesis the concept of contraction, ten years before its use by Beurling–Deny in potential Theory.

The problem of Spectral Synthesis can be traced back to the 1933 seminal paper of Wiener on Tauberian theorems; after having established the key fact that a never vanishing function belonging to the Wiener algebra A of absolutely convergent Fourier series has an inverse which belongs to A, Wiener mentions in a two lines remark that "*it is obvious that every closed ideal of A is determined by its zeros*".

I disproved this Wiener statement in the Spring 1959; a basic point was to use strongly lacunar series in order to avoid the positive result proved by Beurling in 1949.

Beurling was very pleased with my result; he invited me to deliver a talk in Princeton on my way back from Stanford at the fall 1959.

Spectral Analysis, Spectral Synthesis became a new paradigm in Fourier analysis; it is a modern avatar of the expansion in Fourier series: the values of a Fourier coefficient are forgotten, the only remaining information is the non vanishing of a Fourier coefficient; the convergence of Fourier series is replaced by a weak limit process. It is remarkable that with a so little corpus of hypothesis, it is possible to build a beautiful theory. The advantage of this little corpus of hypothesis is the wide range of applications that they cover.

For instance Spectral Synthesis can be transfered to Potential Theory: Spectral Synthesis means there is the possibility to approximate any distribution of finite energy by a sequence of Radon measures having the same support.

The impact in the litterature of these concepts is considerable: the database Math Sci Net gives on the words "Spectral Synthesis" more than five hundred papers; many of these papers do not mention Beurling's name; these omissions indicate that the concepts introduced by Beurling have now become fully classical.

Prediction theory

Beurling published in 1949 a memorable paper on the spectral decomposition of the multiplication by z operating on the Hilbert space of square integrable holomorphic functions on the unit disk. Beurling considers the algebra A of operators generated by the multiplication operator. He characterizes the invertible elements of A, the *outer functions*. Then any closed spectral variety of A has a generator which is unique modulo multiplication by an outer function; he constructs preferred generators which are the *inner functions*. Finally he obtains the remarkable fact that the inner function is an *algebraic generator* in the sense that every element of the spectral manifold factorizes exactly through the generating inner function.

This paper had a tremendous impact; a whole body theory of research for such factorization in algebras coming either from harmonic analysis either from several complex variables ; another direction has been the developement of the harmonic analysis of a contraction operator on an abstract Hilbert space.

Quasi-conformal maps

The Beurling 1956 paper with Lars Ahlfors: *On the boundary correspondance under quasi-conformal map*, characterizes the boundary values on the circle of quasi-conformal diffeomorphisms of the disk; it seems incredible that such a characterization could exist: it exists and it is very simple: there are *quasi-symmetric maps* which means maps preserving the order of magnitude of the anharmonic ratio of any set of four points on the circle; the quasi-symmetric maps forms a group under the composition, which contains as subgroup the group of Möbius transformations; the corresponding quotient space is nowadays denoted $T(1)$.

Teichmüller have associated to a compact Riemann surface the set of its complex structure classified up to an isotopy. Riemann modular space is the quotient of the Teimüller space by a discrete group, the modular group. It has been realized in the seventies that $T(1)$ contains all Teichmüller spaces of all compact Riemann surfaces. For this reason $T(1)$ is now called the *Universal Teichmüller space*.

From the nineties the universal Teichmüller space plays a key role in the string theory in mathematical physics: the elementary object in string theory are no more material points as in the Galileo dynamic, but a closed curve; a natural group of symmetries appears, the group of change of parametrization of the curve, that is the homemorphism group of the circle; as this group is too large, it is replaced by the Beurling–Ahlfors group of quasi-symmetric homemophisms.

In a recent work (JMPA 2004), developed in the context of representation of Virasoro algebra and percolation theory , we construct a canonical Brownian motion on the space of Jordan curves; in this work the Beurling–Ahlfors construction plays a key role: it allows us to construct a prolongation Z to the disk of a random vector field z defined on the circle and not differentiable such that $\bar{\partial} Z$ stays bounded in the disk.

Entire functions of exponential type

We published two common papers in Acta 1962 and 1967.

In his 1933 book with Paley, Norbert Wiener introduced the concept of *generalized harmonic Analysis* which can be roughly summarized in replacing on an interval J, the classical Fourier series by an arbitrary sequence S of complex exponentials; Norman Levinson devoted a large part of his 1940 book to discussion of this problem; nevertheless in 1960 remained open the effective calculation of $R(S)$, the radius of totality, that is the upper bound of the lengths of the intervals J for which the sequence S of complex exponentials spans the space of square integrable functions on J.

We obtained a fully explicit computation of the radius of totality which settled the problem. The preliminary paper of 1962 solves a division problem in the convolution algebra of measures with compact support: up to the convolution by a measure of arbitrarily small support, divisibility in the ring of analytic functions where Laplace transforms are sitting is identical to the divisibility in the convolution algebra.

The generalized harmonic Analysis appeared recently in the controllability of a system driven by an hyperbolic PDE, the sequence S being specialized into the eigenvalues sequence of the evolution operator.

We devoted half of the academic year 1960–1961 to this problem; very often I stayed at Beurling's house for a full night of common work. I was quite welcome there by Mrs Beurling, a former distinguished Phd student at Uppsala University, where she has been president of the association of graduate students. Mrs Beurling worked in a Chemistry lab at Princeton University. Although very occupied by her scientific work, she was kind enough to prepare a supper for our half night break.

We obtained in June 1961 all our results. I presented mimeographed notes of their proofs at the summer school in Harmonic Analysis, organized by Peter Lax at Stanford University in August 1961. Nevertheless Beurling was not "esthetically" satisfied with these proofs. It took us the fall quarter 1966 at the Institute to write the final version which appeared in Acta 1967.

I recall this personal story in order to emphasize how much Arne Beurling was very exigent on the quality of his publications; only a part of what he knew has been printed: several thousand pages of manuscripts written all around the years were left at his death in his Princeton home.

Beurling Legacy

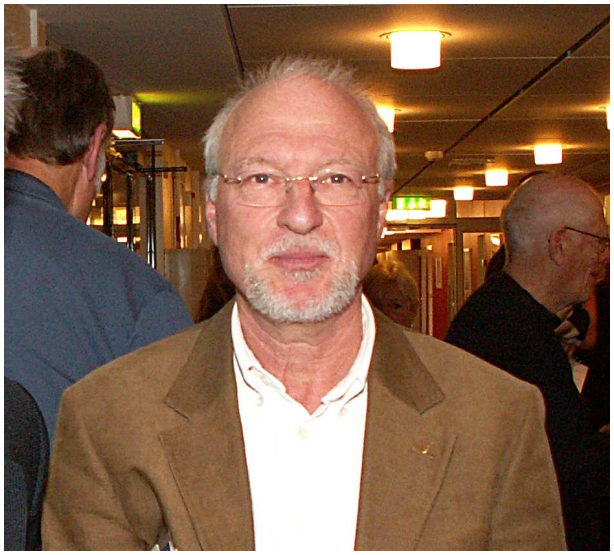
Lars Ahlfors and Lennart Carleson started their Acta paper "Arne Beurling in memoriam" by these words: *Arne Beurling legacy will influence mathematicians for many years to come, maybe even for generations.* I hope that my talk has been able to convince you how their prediction is becoming more and more reality.

In my youth Beurling appeared to me more as a mathematician working on hard concrete problems than an abstract theory builder. Sixty years later Beurling appears now to me more as the key initiator of important theories than a problem solver. How can we explain this paradox?

After having got sharp results, Beurling waited for their publication until he reached a proof which quoting his own words must be "*elementary and transparent*". This, sometimes strenuous, search for beauty in the proofs explains why, starting from concrete problems, Beurling reached basic general principles of universal applicability. The far reaching consequences of this Beurling's quest for Beauty illustrate magnificently the Unity of Mathematics and, by consequence, its transcendental Truth.

Beurling, CGE och CGS

Allan Gut



En av Arne Beurlings elever var Carl-Gustav Esseen. Han föddes i Linköping 1918, kom till Uppsala 1936, disputerade i oktober 1944, varefter han blev professor i tillämpad matematik vid KTH 1949, senare, efter uppdelningen av professuren, i matematisk statistik 1962. Han blev 1967 förste innehavare av den då nyinrättade professuren i matematisk statistik vid härvarande universitet, en tjänst han innehade till sin pensionering vid utgången av 1984. Carl-Gustav Esseen avled i november 2001.

Ung och synnerligen begåvad blev han snart en av Beurlings doktorander inom sannolikhetsteorin, ett av Fourieranalysens viktigaste (viktigare) tillämpningsområden — Fourieranalys är som bekant ett område där Beurling gjort många och banbrytande insatser, även om resultaten många gånger bara presenterades vid seminarier och/eller hamnade i hans skrivbordslådor.

Precis som Fouriertransformer och Fourierserier inom den så kallade rena matematiken entydigt bestämmer den funktion som transformeras så gäller inom sannolikhetsteorin att motsvarande transform, här kallad karakteristisk funktion, entydigt bestämmer en sannolikhetsteoretisk fördelning, alltså sannolikhetsfördelningen för den motsvarande stokastiska variabeln.

Det finns två stora, centrala resultat inom den klassiska sannolikhetsteorin — egentligen finns det tre. Det första är *stora talens lag* som i sin enklaste form säger att om $X_1, X_2, \ldots$ är oberoende, likafördelade stokastiska variabler med väntevärde μ och partialsummor S_n, $n \geq 1$, så gäller att

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{a.s.} \mu \quad \text{då} \quad n \to \infty.$$

Här står $\xrightarrow{a.s.}$ för "almost surely", dvs konvergens med sannolikhet 1.

Lite lösligare uttryckt innebär det att

$$\frac{S_n}{n} \approx \mu \quad \text{då } n \text{ är "stort".}$$

En naturlig fråga som inställer sig är "hur ungefär lika är de?".

Svaret på den frågan ges av det andra huvudresultatet, nämligen den *centrala gränsvärdessatsen*, CGS, enligt vilken

$$\sqrt{n}\Big(\frac{S_n}{n} - \mu\Big) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2) \quad \text{då} \quad n \to \infty,$$

alltså att skillnaden mellan det aritmetiska medelvärdet och väntevärdet uppblåst med en faktor $\sqrt{n}$ konvergerar i fördelning mot en normalfördelning vars varians är densamma som den för summanderna som därmed antas vara ändlig (och positiv). Den lösligare CGS-versionen blir tydligen

$$\sqrt{n}\Big(\frac{S_n}{n} - \mu\Big) \approx N(0,\sigma^2) \quad \text{då } n \text{ är "stort"},$$

och motsvarande naturliga "hur ungefär lika är de?" besvaras av *restermsuppskattningen*, vilken blev temat för Carl-Gustav Esseens doktorsavhandling, som inte bara behandlade fallet med likafördelning utan även mer generella och även vektorvärda fall.

Den i många sammanhang välkände Aleksander Michailovitch Ljapounov fann kring förra sekelskiftet en likformig uppskattning av skillnaden mellan fördelningsfunktionerna för det uppblåsta medelvärdet och normalfördelningen [12, 13], där han visade att

$$\sup_x \Big| F_{\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}}(x) - F_{N(0,1)}(x) \Big| \le C \cdot \frac{\gamma^3 \log n}{\sigma^3 \sqrt{n}},$$

där C är en numerisk konstant och γ^3 är tredje momentet som nu förutsätts existera — för varje ytterligare precision behövs ytterligare ett moment, vilket ju inte är särdeles onaturligt; man får inte veta mer om man inte bjuder på något mer.

Logaritmen avlägsnas

Esseens "uppdrag" blev nu att göra sig av med den extra logaritmen. Vilket han också gjorde. Redan hösten 1940, vid blott 22 års ålder, hade han sammanställt sitt resultat [5] som publicerades i Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik 1942, där han alltså bevisade att

$$\sup_x \Big| F_{\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}}(x) - F_{N(0,1)}(x) \Big| \le C \cdot \frac{\gamma^3}{\sigma^3 \sqrt{n}}. \tag{1}$$

Många pannor har stångats blodiga i avsikt att finna så bra uppskattningar som möjligt på konstanten C. Då detta skrives är bästa uppskattningen uppåt 0.7655 av Shiganov [15] från 1986.

Vad beträffar uppskattningar nedåt så är det lätt att se att om summanderna väljes som ± 1 med sannolikheten $1/2$ i vardera punkten så gäller det att

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \sup_x |F_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(x) - \Phi(x)| = \frac{1}{2\pi} \approx 0.3989.$$

I [7] visar Esseen att om man i stället väljer tvåpunktsfördelningen

$$P(X = -[(4-\sqrt{10})/2]h) = \frac{\sqrt{10}-2}{2},$$
$$P(X = [(\sqrt{10}-2)/2]h) = \frac{4-\sqrt{10}}{2},$$

där $h > 0$, så erhålles

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \sup_x |F_{\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}}(x) - \Phi(x)| = \frac{\sqrt{10}+3}{6\sqrt{2\pi}} \approx 0.4097.$$

Resultatet (1) kallas för *Berry-Esseens* sats, vilket gör att man undrar vem Berry är eller var. A.C. Berry visade samma resultat i sin publikation [2] vilken utkom redan 1941, alltså året före [5]. Gåtans lösning finner man i en fotnot i den senare artikeln:

> While the present paper — a summary of an earlier work, which was completed in the autumn of 1940 — has been at the press, I have found in a review in Mathematical Reviews, 2, (1941), p. 228, that the relation (29) [dvs. (1)] has been proved by A.C. BERRY, Trans. Amer. Math. Soc. 49, (1941), p. 122–136. This work is not yet accessible in Sweden.

Skälet till att författarna inte kände till varandra var alltså andra världskriget, vilket hindrade vetenskapliga tidskrifter att färdas fritt.

Esseens lemma

Ett av många verktyg inom matematiken är *transformer*. Finessen med dem är att

- det finns en omvändbart entydig avbildning mellan de objekt man vill undersöka och transformerna av desamma;
- transformerna är mer lätthanterliga.

I skolan lärde man sig (förr) att använda logaritmtabeller för att överföra multiplikation (svårt) till addition (lätt). Entydigheten gavs av relationen

$$x = 10^{\log_{10} x} \quad \text{respektive} \quad x = e^{\log_e x}.$$

I vårt fall gäller en-entydigheten, som inledningsvis noterades, mellan karakteristiska funktioner och stokastiska variabler eller deras fördelningar. I analogi med det förhållandet som säger att motsvarande objekt är lika på bägge sidor kan man tänka sig att två transformer är *nästan* lika om och endast om motsvarande fördelningar är nästan lika, vilket mera formellt blir till en *konvergenssats*, kallad kontinuitetssats. Sålunda kan man visa konvergens i fördelning mot standardnormal-fördelningen (exempelvis) genom att visa att motsvarande följd av karakteristiska funktioner konvergerar mot $\varphi_{N(0,1)}(t) = e^{-t^2/2}$, där alltså bokstaven φ används för att beteckna en karakteristisk funktion.

Nästa logiska steg är att tänka sig en motsvarande *diskrepanssats* som innebär att man kan "översätta" diskrepans mellan transformer till motsvarande för fördelningar.

Och det är just detta som är knuten till den Esseenska metoden, manifesterad i följande resultat som kallas *Esseens lemma*.

Lemma 1 *Låt U och V vara stokastiska variabler och antag att*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} F_V'(x) \le A.$$

Då gäller

$$\sup_x |F_U(x) - F_V(x)| \le \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T} \left|\frac{\varphi_U(t) - \varphi_V(t)}{t}\right| dt + \frac{24A}{\pi T}. \tag{2}$$

Beviset bygger på synnerligen intrikat matematisk analys.

För att bevisa huvudresultatet appliceras därefter Esseens lemma med

$$U = U_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \quad \text{och} \quad V \in N(0,1).$$

För det ändamålet behövs det emellertid först en uppskattning av skillnaden mellan de i integranden ingående karakteristiska funktionerna.

Lemma 2 *För* $|t| \le \frac{\sigma^3\sqrt{n}}{4\gamma^3}$ *gäller*

$$|\varphi_{\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}}(t) - e^{-t^2/2}| \le 16\frac{\gamma^3}{\sigma^3\sqrt{n}}|t|^3 e^{-t^2/3}.$$

Beviset avslutas genom att man kombinerar de bägge lemmorna med

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad T = T_n = \frac{\sigma^3\sqrt{n}}{4\gamma^3} \quad \text{och} \quad \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2/3}\,dt = \frac{3}{2}\sqrt{3\pi}.$$

För detaljerna hänvisas till Esseens ursprungliga arbeten [5, 6] alternativt till [9], Kapitel 6.

Två kommentarer:

- Bevisskissen här är i själva verket adapterad från fallet med oberoende men inte identiskt fördelade summander.
- Återigen kan man naturligtvis fråga sig hur ungefärligen detta resultat gäller, vilket leder till så kallade Edgeworth-utvecklingar:

  $$F_{\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}}(x) = \Phi(x) + \frac{E(X-\mu)^3}{6\sigma^3\sqrt{2\pi n}}(1-x^2)e^{-x^2/2} + \cdots,$$

  där Hermite polynomen kommer in som en ytterligare ingrediens.

Momentproblemet

Momentproblemet handlar om i vad mån en given följd moment, $\{m_n,\ n \ge 1\}$, bestämmer motsvarande sannolikhetsfördelning entydigt eller ej; se t.ex. [16] för en översikt.

Ett trivialt tillräckligt villkor är att den momentgenererande funktionen existerar. Ett mer sofistikerat dylikt är Carleman-villkoret [4], enligt vilket svaret är jakande om

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_{2k}^{-1/2k} = \infty.$$

För icke-negativa stokastiska variabler är motsvarande villkor

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_{k}^{-1/2k} = \infty.$$

Motexempel hittar man nödvändigtvis bland fördelningar som har moment av alla ordningar, men inte någon momentgenererande funktion. Ett sådant exempel är lognormalfördelningen, ett annat är klassen av vissa generaliserade gammafördelningar. De är dessutom exempel på fördelningar där momenten inte entydigt bestämmer den bakomliggande fördelningen.

Ett specialfall är när fördelningen är absolutkontinuerlig. Då är ett nödvändigt (men inte tillräckligt) villkor för entydighet att *Krein-integralen* är divergent:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\log f(x)}{1+x^2}\,dx = \infty,$$

med andra ord, om integralen är konvergent så är svaret negativt. För en sannolikhetsteoretiker är det intressant att notera att samma integral förekommer i teorin för stokastiska processer och fysiskt realiserbara filter.

Nämligen, för att en stationär stokastisk process $\{X(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ skall kunna representeras på formen

$$X(t) = \int_0^{\infty} a(s)\,dY(s),$$

där $\{Y(t),\, t \in \mathbb{R}\}$ är integrerat vitt brus och $\{a(t),\, t \in \mathbb{R}^+\}$ är ett kvadratiskt integrerbart fysiskt realiserbart filter, så är det nödvändigt och tillräckligt att spektrum är absolutkontinuerligt och att spektraltätheten har en ändlig Krein-integral (se t.ex. [8], Theorem 4, sid. 226).

Bakom detta resultat ligger det förhållandet att spektraltätheten skall kunna representeras på formen $f(y) = |h(iy)|^2$, där funktionen h är Laplacetransform till en kvadratiskt integrerbar process $\{b(t),\, t \in \mathbb{R}^+\}$. Men då gäller enligt det så kallade *Paley-Wiener kriteriet* att den klass av funktioner h som är så beskaffad sammanfaller med klassen H^2 av funktioner h som är analytiska i högra halvplanet och sådana att

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(x+iy)|^2 dy \le C \quad \text{för alla} \quad x,$$

se t.ex. [14], sidan 372. För vårt vidkommande innebär detta att de spektraltätheter som kan representeras på det önskade sättet — alltså så att motsvarande $h \in H^2$ — är precis de som har en ändlig Krein-integral.

En koppling till Beurling

Av speciellt intresse i detta sammanhang är förstås att det dessutom finns kopplingar till, bland annat, kvasianalyticitet och därmed till Arne Beurling.

Låt nämligen $\{C(M_n),\, n \ge 0\}$ vara klassen av oändligt deriverbara funktioner f sådana att

$$\|f^{(n)}\|_\infty \le C_f B_f^n M_n \quad \text{för} \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

där C_f och B_f är numeriska funktionsspecifika konstanter. Klassen $\{C(M_n),\, n \ge 0\}$ kallas *kvasianalytisk* om

$$f \in C(M_n), \quad f^{(n)}(0) = 0 \quad \text{för alla} \quad n \quad \Longrightarrow \quad f \equiv 0.$$

Eller, mer generellt, för att citera från inledningen till Beurlings arbete [3]:

> Let γ be a Jordan arc in the plane and let $C(\gamma)$ be a linear class of continuous functions on γ. [...] $C(\gamma)$ is *quasianalytic* if the only function $f(z)$ in $C(\gamma)$ that vanishes on a subarc is the function $f(z) \equiv 0$.

En analytisk funktion är ju entydigt bestämd av sina derivator. Å andra sidan existerar det oändligt deriverbara funktioner som är lika med 0 på ett intervall utan att vara identiskt lika med noll. Generaliseringen till kvasianalyticitet består sålunda i att man får motsvarande entydighet om man pålägger begränsningsvillkor på derivatorna.

Ett första exempel på en kvasianalytisk klass är klassen $\{C(n!),\, n \ge 0\}$, vilket för en sannolikhetsteoretiker inte kommer som någon överraskning. Låt nämligen ψ_1 och ψ_2 vara momentgenererande funktioner och låt ψ beteckna skillnaden. Om nu ψ uppfyller villkoren i definitionen så innebär det att de stokastiska variabler som svarar mot ψ_1 respektive ψ_2 har sammanfallande moment av alla ordningar och därmed samma fördelning, vilket innebär att $\psi \equiv 0$.

Följande (delar av en) sats av Carleman och Denjoy visar på sambandet mellan kvasianalyticitet och Krein-integralen (med omvänt tecken) och Carleman-villkoret; se t.ex. [14], Sats 19.11, sidan 380.

Sats: Låt $\{M_n,\, n \ge 0\}$ vara en log-konvex följd med $M_0 = 1$, och sätt $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{M_n}$ för $x > 0$. Då är följande utsagor ekvivalenta:

(i) $\{C(M_n),\, n \ge 0\}$ är inte kvasianalytisk;

(ii) $\int_0^\infty \frac{\log g(x)}{1+x^2}\, dx < \infty$;

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n^{-1/n} < \infty$;

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_{n-1}}{M_n} < \infty$.

Vi noterar först att om speciellt $M_n = n!$ så blir summan i (iv) den harmoniska serien som är divergent, vilket veriferar att klassen $\{C(n!),\, n \geq 0\}$ är kvasianalytisk.

Vidare ser vi hur (i) och (ii) sammanlänkar Krein-integralen och kvasianalyticitet, och hur (iii) sammanfaller med Carleman-villkoret för X^2 om X är en stokastisk variabel med jämna moment M_n, $n \geq 1$. Mellan raderna kan vi, från [3], sidan 420, även utläsa en samhörighet mellan kvasianalyticitet och momentproblemet:

> If C is a quasianalytic class of C^∞ functions on and interval (a,b), a function f is determined by its derivatives at a fixed point, 0 say, in (a,b). It is an interesting and important problem to recover $f(x)$ from the formal Taylor series at 0 and to describe the properties of these formal series.

Om nämligen φ (i stället för f) är en karakteristisk funktion så vet vi att koefficienterna i potensserieutvecklingen är momenten till motsvarande stokastiska variabel (som alltså antas ha moment av alla ordningar). Det intressanta och viktiga problemet som det talas om i citatet är det omvända, nämligen att identifiera den karakteristiska funktionen — och därmed sannolikhetsfördelningen — utgående från momenten; alltså just momentproblemet.

Avrundning

Mot bakgrund av föreliggande artikelförfattares bakgrund uppehåller sig dessa rader till största delen kring en av de två Beurlingska "outstanding students in Uppsala" som omnämns allra sist i Lars Ahlfors och Lennart Carlesons nekrolog [1]. I ett avslutande avsnitt antyds och belyses flyktigt sambandet mellan ett av Beurlings verksamhetsområden, nämligen kvasianalytiska funktioner och sannolikhetsteori, enkannerligen momentproblemet, ett samband som det torde löna sig att analysera ytterligare.

Vi noterar även att Krein-integralen är involverad vid ett flertal tillfällen. Svante Janson har uppmärksammat mig på att Paul Koosis har skrivit två volymer [10, 11] om sammanlagt nästan 1200 sidor om denna integral som han kallar den *logaritmiska integralen*.

Referenser

[1] AHLFORS, L. OCH CARLESON, L. (1988). Arne Beurling in memoriam. *Acta Math.* **161**, 1-9. Även *Collected works* **I**, *ix-xv*. Birkhäuser.

[2] BERRY, A.C. (1941). The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates. *Trans. Amer. Math. Soc.* **49**, 122-136.

[3] BEURLING, A. (1989). Quasi-analyticity. *Collected works* **I**, 396-431. Birkhäuser.

[4] CARLEMAN, T. (1926). Les fonctions quasi-analythiques. *Collection Borel*, Gauthiers-Villars, Paris.

[5] ESSEEN, C.-G. (1942). On the Liapounoff limit of error in the theory of probability. *Ark. Mat., Astr. o. Fysik* **28A** 9, 1-19.

[6] ESSEEN, C.-G. (1945). Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace-Gaussian law. *Acta Math.* **77**, 1-125.

[7] ESSEEN, C.-G. (1956). A moment inequality with an application to the central limit theorem. *Skand. Aktuar. Tidskr.* **XXXIX**, 160-170.

[8] GIKHMAN, I.I. OCH SKOROKHOD, A.V. (1969). *Introduction to the theory of random processes*. Saunders.

[9] GUT, A. (2005). *Probability: A graduate course*. Springer-Verlag, New York.

[10] KOOSIS, P. (1988). *The logarithmic integral I*. Cambridge university press, Cambridge.

[11] KOOSIS, P. (1992). *The logarithmic integral II*. Cambridge university press, Cambridge.

[12] LYAPOUNOV, A.M. (1900). Sur une proposition de la théorie des probabilités. *Bull. Acad. Sci. St.-Pétersbourg* (5) **13**, 359-386.

[13] LYAPOUNOV, A.M. (1901). Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilités. *Mem. Acad. Sci. St.-Pétersbourg* (8) **12** No 5.

[14] RUDIN, W. (1986). *Real and complex analysis*, third ed. McGraw-Hill.

[15] SHIGANOV, I.S. (1986). Refinement of the upper bound of the constant in the central limit theorem. *J. Sov. Math.* **35**, 2545-2550.

[16] SHOHAT, J.A. OCH TAMARKIN, J.D. (1943). *The problem of moments*. Amer. Math. Soc., Providence, R.I.

Så gjorde Beurling – kanske

Bengt Beckman

Det är många faktorer som spelar in om man vill säga vad som kännetecknar en bra forcör: Den analytiska förmågan – skarpsinnet, naturligtvis. Iakttagelseförmåga. Dra dom rätta slutsatserna. Respektlöshet, fräcka chansningar. Ha tur.

Man säger ofta: En bra målvakt har tur. Det samma kan sägas om en bra forcör. Jag har sett många forcörer. De som är bra har tur. Beurling löste den komplicerade G-skrivaren på ett par veckor. Det är klart att han hade tur. Det gäller också att inse att man har tur och satsa rätt. Jag ska visa hur Beurling kan ha gått tillväga.

Situationen är följande: Beurling sitter ute på det vackra Elfviks udde på Lidingö. Det kallas RABO för att man där bearbetar Röda Armén och Beurling har gjort betydande insatser på ryska överchiffrerade system. Det är nu slutet av maj 1940. Tyskarna hade ockuperat Norge den 9 april. Beurling får sig "tillskyfflat", som han säger, ett okänt material. Bakgrunden till att detta material fanns kände Beurling till att börja med inte till. Historien var följande. Svenska UD hade samma dag som tyskarna gick in i Norge fått deras begäran om att hyra västkustkabeln. "Protestera som fan men tacka Gud för möjligheten" hade signaltjänstavdelningens chef Eric Anderberg sagt då ÖB Thörnell bad om råd vad man skulle svara tyskarna. Telegrafverket hade därefter snarast möjligt kopplat in sig på kabeln. Redan efter några dagar kunde man registrera den tontelegrafi som tyskarna sände. Man byggde om mottagarutrustning så att alla tecken – även typografiska – registrerades och skrevs ut på pappersremsa på telegrafverkets Creedteleprintrar. Det förekom 32 tecken enligt den internationella teleprinteralfabetet CCITT nr 2 (bild 0). Genom operatörernas klartextrafik fick man reda på att den oläsliga text som nu ymnigt började förekomma härrörde från den maskin tyskarna kallade Geheimschreiber. Det fanns i början en sådan "G-skrivare" i Oslo och en i Berlin, senare tillkom flera. De kunde arbeta i dialog och trafiken registrerades i Sverige på två teleprintrar, en för vardera riktningen.

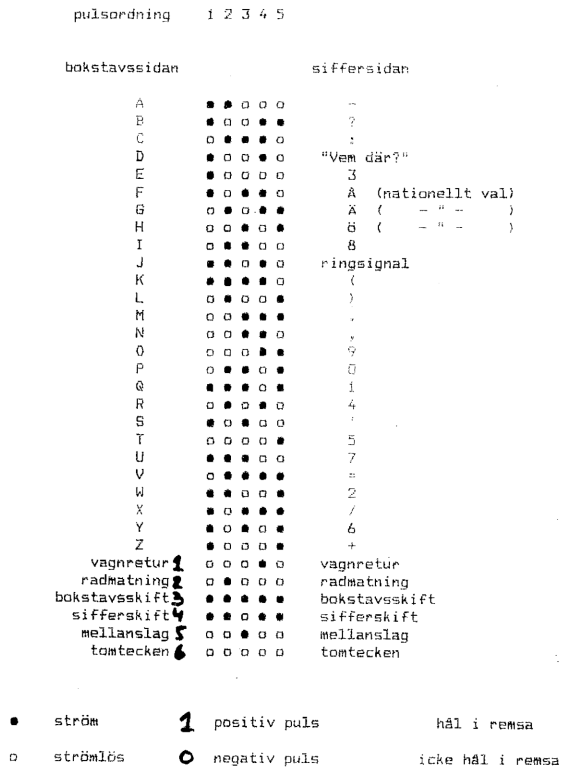


Bild 0

Den 21 maj var mottagningen installerad i det ruffiga huset Karlaplan 4 där den svenska forceringsverksamheten hade sina lokaler.

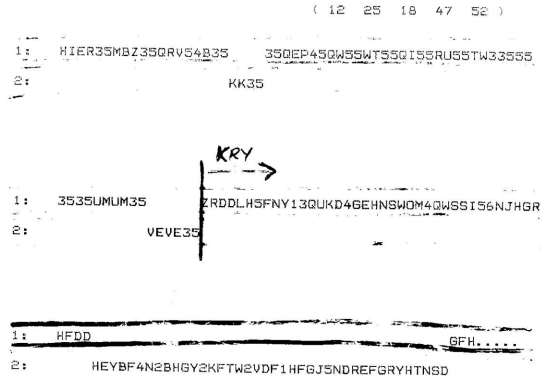


Bild 1. Två texter från G-skrivare i dialog. Det förbryllade först Beurling, som letade efter parallella texter, att upprepningar "på plats" (dvs lika långt från telegrammens början) saknades. Det fanns gott om upprepningar, men de var spridda. Förklaringen var att de båda korresponderande sändarnas texter klistrades upp på skilda blanketter medan de ur kryptosynpunkt var att betrakta som ett meddelande. Sedan båda korrespondenterna kopplats till samma teleprinter kunde Beurling snabbt hitta angreppspunkter.

A L Z G J L G U H 4 H J P L H N 6 N 5 B V E 3 C Q U H G F B J N...
N P 3 U M W F Z 3 1 N M Y K M J H B 6 B 5 F M Q U H F D F Z 4 5...
G R Q U M A A 4 J T Q F L Q M H J I E G T V F W P O I 3 2 S L K...
L Y Z G J L O R Y Y D R Q K N H J N 5 1 A K F D 5 V C E R W R V...
L E Z G K V R V A N B W E 6 M J U T G B T R V 3 6 H 4 H 1 C S 1...
B O T A 3 W F U S G O D A 2 J I U N Y K R I Y Y T 5 F S C O G B...
Y E Y Z L 4 2 D Y D 5 L M H L O I M U Q T G E 5 5 H B Z 5 H E B...
R K Z G B W F L I X 6 A Z E M K E Y 4 D W O M B O C X Q 6 L B L...
C C N R W W G K O T V 5 L L U M C D 3 E 4 R 3 I Y H J A S L A 6...
1 T X U M S M U 4 V V N T Z J N F I W 3 5 S D E D O T P M A N D...

Bild 2. Parallella texter. Här 10 st. Upprepningar "på plats".

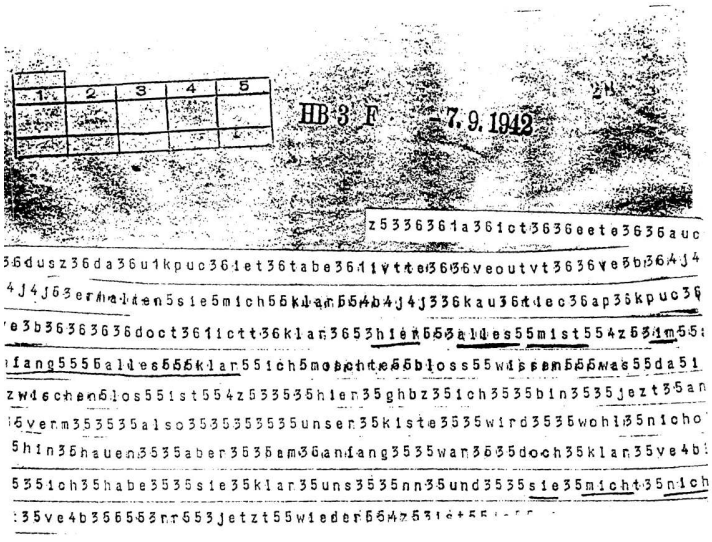


Bild 3. Klartexter viktigt att studera. Det vimlar av 35 och 53. 3=bokstavsskift och 5=mellanslag. Störningar på linjen gjorde att maskinen ofta halkade över på siffersidan och texten blev oläslig. Operatörerna tog därför för vana att mellan orden inte bara sätta in mellanslag utan även bokstavsskift. Eftersom det enbart var på den svenska mottagarapparaturen som alla teckenkombinationer registrerades såg aldrig de tyska operatörerna hur dominerande "bokstavsskift" och "mellanslag" blev.

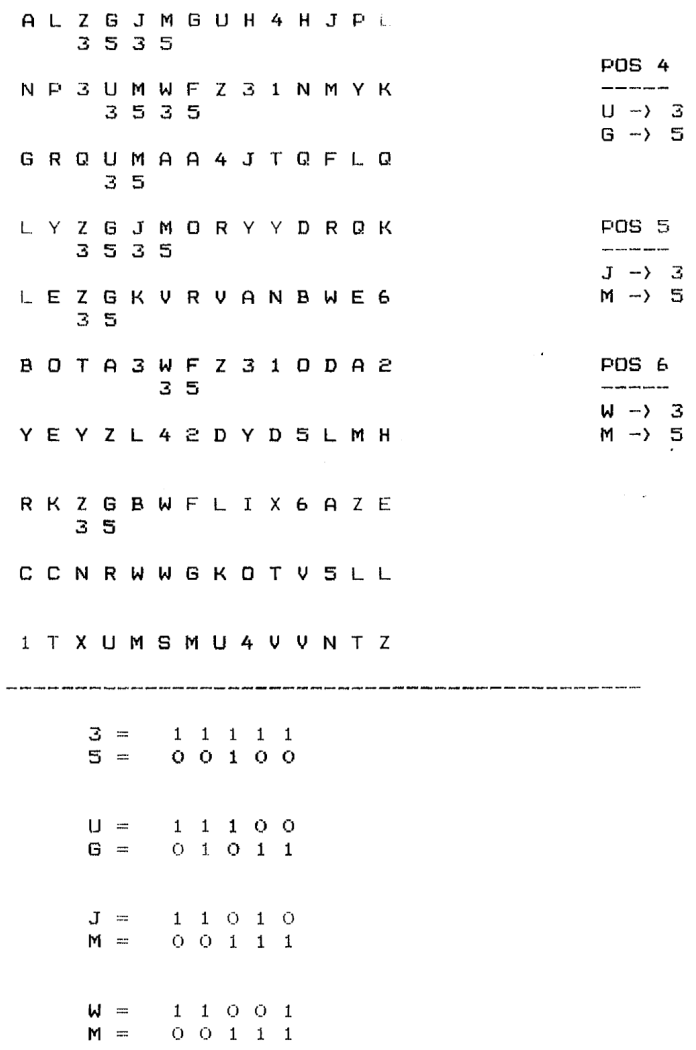


Bild 4. Beurling gissar att 35 finns i de underliggande texterna på platser där bigram är upprepade under varandra.

Om man studerar texten kolumnvis ser man att i samma kolumn uppträder ibland både det som gissats vara 3 och det som gissats vara 5. 3 och 5 ställda under varandra ser i fjärrskriftskoden ut så här 3=11111 5=00100 Här kan man göra iakttagelsen att en bit är gemensam. Nu ser vi på de gissade krypterade motsvarigheterna när de står i samma kolumn – dvs samma position i texten – och alltså är chiffrerade på samma sätt:

Pos. 4.	U	11100
	G	01011
Pos. 5.	J	11010
	M	00111
Pos. 6.	W	11001
	1	00010

Här kan man göra upptäckten att en bit fortfarande är gemensam men att den skiftar plats beroende på position! På sådana iakttagelser byggde Beurling säkert sin hypotes.

Beurling har själv sagt om sin hypotes: Ett fem-bitstecken kan inte manipuleras på så många sätt. Man kan överlagra det på vanligt sätt. Men ska man göra något mer har man inte så mycket

mer att välja på än att flytta om bitarna. Det betyder i de exemplifierade fallen: om man först ändrar tecknets utseende genom en överlagring med fem godtyckliga bitar och därefter kastar om bitarna i resultatet, så måste ju en överensstämmelse som den mellan 3 och 5 följa med, eftersom tecknen genomgått samma procedur.

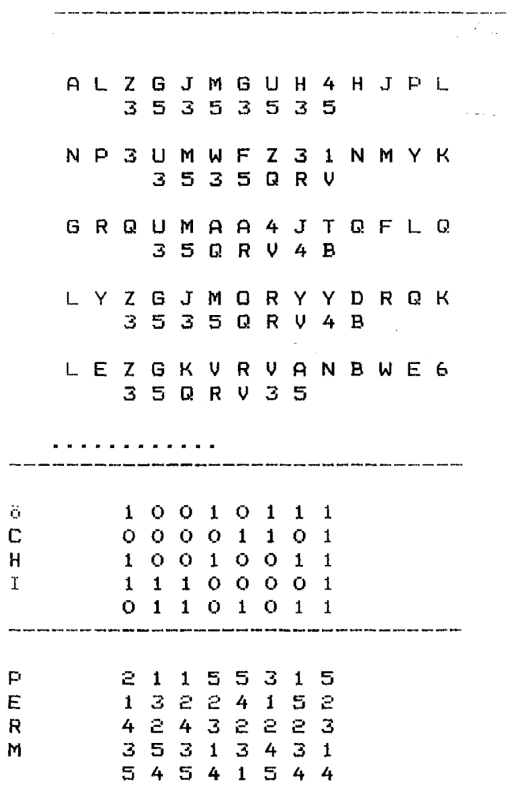


Bild 5. Här har man hunnit längre och gissat på andra vanliga inslag i klartextingresserna, t.ex qrv4? (uppfattat?). Samtidigt har man börjat kunna rekonstruera överlagring (XOR) och permutation.

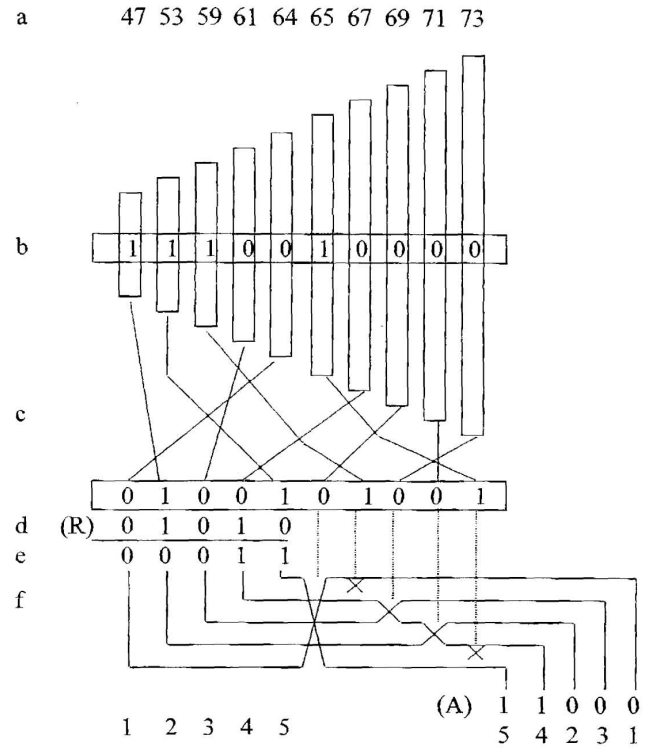


Bild 6. Så småningom helt klarlagd funktion. Fem hjul utför addition (XOR) och fem hjul permuterar.

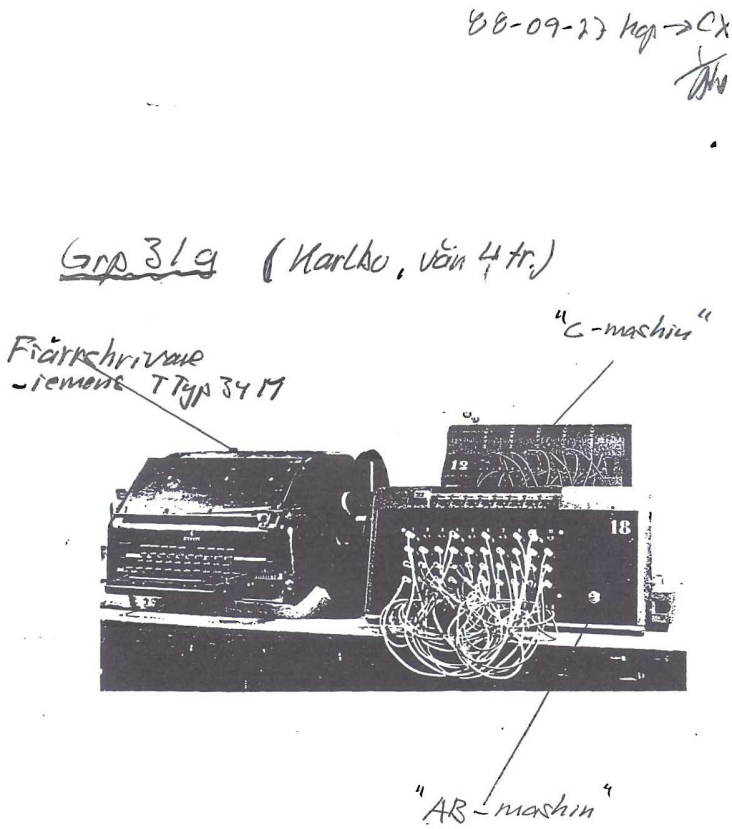


Bild 7. Särskilda dechiffreringsapparater byggs. De ställs in efter de nycklar de matematiska forcörerna tagit fram under morgonen.

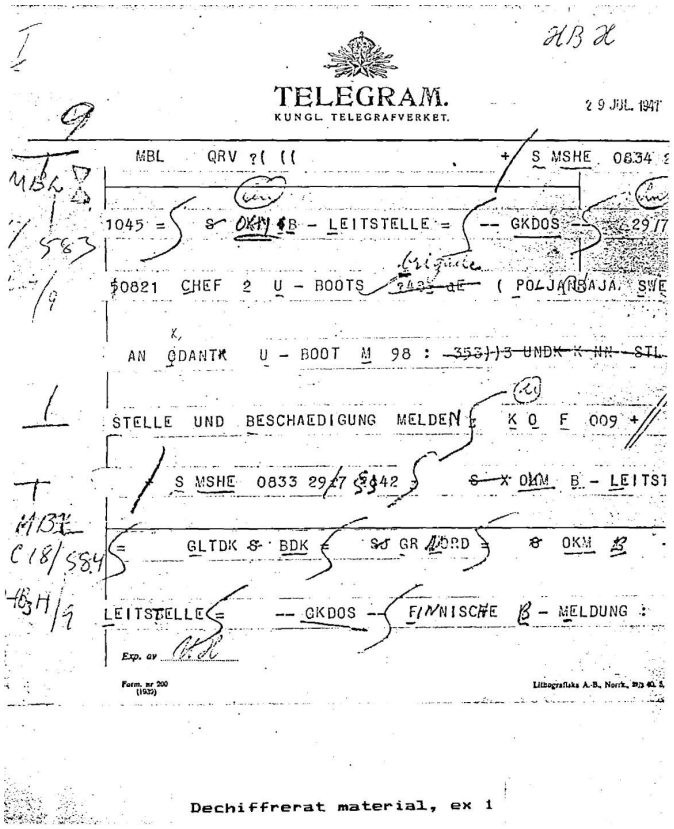


Bild 8. Krytext från teleprintrarna skrivs in . Den dechiffreras i "apparna" och kommer åter i klartext på teleprintrarna. Det blev en stor industri. Nära 300000 telegram forcerades under tiden fram tom 1943.

Hur kunde Beurling knäcka G-skrivaren så snabbt?

1. Klartexterna avslöjade 35-dominansen.
2. Instruktionerna följdes ej. Det blev många parallella med snarlikt innehåll. Bästa möjliga utgångsläge för forcören.
3. Långa störda linjer och möjligheten för operatörerna att med spaken “Langsam drehen” ställa alla 10 hjulen i utgångsläge. Denna möjlighet avslöjades efter kriget då man fick se autentiska G-skrivare.

Referenser

[1] B. BECKMAN (1996, 2006). *Svenska kryptobedrifter. Hur Arne Beurling knäckte den tyska chiffertrafiken*. Bonnier, Stockholm.

English translation by Kjell-Ove Widman (2002): *Codebreakers: Arne Beurling and the Swedish Crypto Program During World War II*. American Mathematical Society, Providence, R.I.


Prüf-Nr. 1387
Geheime Kommandosache!
A 30
Die Siemens-
Schlüsselfernschreibmaschine
SFM T 52d
(T typ 52d)
Geheime Kommandosache!
SIEMENS