DEN NATURLIGA SPÄRREN MED JÄMKADE UDDATALSMETODEN

SVANTE JANSON

SAMMANFATTNING. Formler ges för den "naturliga spärren", dvs den andel röster ett parti behöver för att få ett mandat i konkurrens med övriga partier, för ett givet antal mandat och partier, vid val som förrättas med den jämkade uddatalsmetoden. Tre versioner ges; dels den maximala och minimala andel som kan behövas vid extremt ogynnsam resp. gynnsam fördelning av övriga partiers röster, och dels ett typiskt värde vid normala fördelningar på övriga partier. Det senare, som kan tas som ett värde på den naturliga spärren, är $0{,}7/(m + 0{,}2)$, där m är antalet mandat.

Jämförelser görs med ojämkad uddatalsmetod och heltalsmetoden. I dessa fall är den naturliga spärren $1/2m$ för uddatalsmetoden och $1/(m + 0{,}5n)$ för heltalsmetoden, där n är antalet partier.

1. Inledning

Vid svenska riksdags-, landstings- och Europaparlamentsval finns småpartispärrar: ett parti behöver ha minst 4%, 3% resp. 4% av alla giltiga röster för att få delta i mandatfördelningen[1] [3, 3 kap. 7 §], [5, 14 kap. 6 §].[2]

Vid kommunalval finns ingen sådan explicit spärr, men man talar om den *"naturliga spärren"*, varmed menas den andel röster som behövs för att ett parti skall få minst ett mandat i konkurrensen med övriga partier. Detta är ingen exakt gräns, eftersom ett partis mandattal inte bara beror på partiets andel röster, utan i viss mån också på hur övriga röster fördelas mellan övriga partier.

Jag studerar därför tre versioner av den "naturliga spärren".

(i) P_+: Den minsta andel röster som *garanterar* minst ett mandat. (Även vid en extremt ogynnsam fördelning av övriga röster.)
(ii) P_-: Den minsta andel röster som gör det *möjligt* att få ett mandat. (Vid en extremt gynnsam fördelning av övriga röster.)
(iii) P_0: Den andel röster som gör det *troligt* att få ett mandat, vid "normala" fördelningar av övriga röster.

6 februari 2012.

[1] Vid riksdagsval finns ett undantag, som hittills aldrig kommit till tillämpning, för ett parti som får mer än 12% i en valkrets.

[2] Det finns ingen absolut garanti för att ett parti som når över spärren verkligen får mandat, men i praktiken torde detta alltid vara fallet, enligt formlerna nedan tillämpade på hela riksdagen eller landstinget.

Av dessa versioner är P_+ och P_- väldefinierade och beräknas exakt nedan, medan P_0 är lite vagare bestämd (vad är "troligt" och "normala"?), varför värdet på den skall ses som en approximation.

Som tumregel bör P_0 fungera bra, och för allmänna diskussioner kan man normalt säga att den "naturliga spären" är P_0 nedan (med reservationerna ovan).

P_+ och P_- visar hur mycket den faktiska gränsen som mest kan avvika från P_0 i extrema fall, men i praktiken torde avvikelserna vara mindre, speciellt med så många partier som det finns f.n.

I avsnitt 7 ges några exempel från valet 2010.

Den naturliga spärren beror naturligtvis på antalet mandat som fördelas, och beräknas därför vid kommunalval för varje valkrets för sig. (Det finns ju inga utjämningsmandat i kommunalval.)[3]

Resultaten beror naturligtvis också på valmetoden. Vi förutsätter den jämkade uddatalsmetoden (med jämkning 1,4) som i svenska val [5, 14 kap. 3 §], utom i avsnitt 8 där vi som jämförelse ger motsvarande formler för ojämkade uddatalsmetoden och heltalsmetoden.

2. Resultat

De tre värden P_+, P_-, P_0 ges för olika antal mandat och partier av följande formler. Observera att för P_+ finns tre olika fall, beroende på antalet mandat och partier. (Fallen överlappar; i gränserna när två formler kan användas ger de samma resultat.)

Sats 1. *Om m mandat i en valkrets fördelas på n partier gäller följande.*

(i) *Den minsta röstandel som* garanterar *minst ett mandat är*

$$P_+ = \frac{0{,}7}{m - 0{,}5n + 1{,}2} \qquad \text{om} \quad m \geq 2n - 2, \tag{2.1}$$

$$P_+ = \frac{0{,}7}{0{,}8m - 0{,}1n + 0{,}8} \qquad \text{om} \quad n - 1 \leq m \leq 2n - 2, \tag{2.2}$$

$$P_+ = \frac{1}{m + 1} \qquad \text{om} \quad m \leq n - 1. \tag{2.3}$$

(ii) *Den minsta röstandel som gör det* möjligt *att få ett mandat är*

$$P_- = \frac{0{,}7}{m + 0{,}7n - 1{,}2} \qquad \text{om} \quad m \geq 2, \tag{2.4}$$

[3] Resultaten gäller även vid Europaparlamentsval, om man bortser från den explicita spärren; där är hela landet en valkrets med f.n. 20 mandat. (I det senaste valet 2009 hade Sverige 18 mandat, men antalet ökades 2011 [7].)

Vid val till riksdag och landsting finns utjämningsmandat, och man gör en totalfördelning för hela riksdagen resp. landstinget; resultaten nedan gäller därför i princip med hela riksdagens eller landstingets mandattal, med reservation för fallet att utjämningsmandaten inte räcker till för fullständig utjämning, vilket 2010 skedde i riksdagsvalet och i 9 av 20 landstingsval [9]. Resultaten kan även användas för de fasta mandaten i en viss valkrets.

$$P_- = \frac{1}{n} \qquad\qquad om \quad m = 1. \tag{2.5}$$

(iii) *Den minsta röstandel som gör det* troligt *att få minst ett mandat är*

$$P_0 = \frac{0{,}7}{m + 0{,}2}. \tag{2.6}$$

Anmärkning 2.1. För att garanterat få ett mandat behövs egentligen en röstandel strikt större än P_+; om andelen är lika med P_+ kan i extrema fall partiet bli utan mandat efter lottning.

Anmärkning 2.2. P_0 är som sagts bara ungefärlig, och ofta nog lite i överkant, speciellt om det finns många röster på mycket små partier utan mandat, se avsnitt 6.

Formeln (2.6) kan approximeras med den enklare, och mer intuitiva, $P_0 \approx 0{,}7/m$; skillnaden är normalt betydelselös, och inom ramen för de osäkerheter som ändå finns, men jag rekommenderar värdet (2.6) som det bästa värdet på den naturliga spärren.

Anmärkning 2.3. Om antalet partier $n = 2$ så är $P_+ = P_- = P_0$; i detta fall är alltså även P_0 ett exakt värde. (Det finns ju ingen osäkerhet i fördelningen mellan övriga partier när det bara finns ett annat.) Med fler än två partier är $P_- < P_0 < P_+$.

3. Beteckningar

Vi antar att m mandat fördelas på n partier, som numreras $1, \dots, n$. Partiernas röstetal betecknas med $r_1, \dots, r_n$ och deras respektive mandattal med $m_1, \dots, m_n$; vidare låter vi R vara totalantalet (giltiga) röster och $p_i = r_i/R$ andelen röster på parti nummer i.

Vi har alltså

$$R = \sum_{i=1}^{n} r_i \qquad \text{och} \qquad m = \sum_{i=1}^{n} m_i. \tag{3.1}$$

Om x är ett reellt tal, låt $\langle x \rangle$ beteckna x avrundat till närmaste heltal. (Om x ligger mitt emellan två heltal kan $\langle x \rangle$ vara vilket som helst av dem; i detta fall kan man alltså avrunda både uppåt och nedåt.) Detta betyder i formler att $\langle x \rangle$ är ett heltal som uppfyller

$$x - \tfrac{1}{2} \le \langle x \rangle \le x + \tfrac{1}{2}. \tag{3.2}$$

4. Minsta röstandel som kan ge mandat

Vi visar sats 1(ii). Antag först att $m \ge 2$.

Antag att "vårt" parti är nummer 1, och att det fått (minst) ett mandat, dvs $m_1 \ge 1$. När partiet fick sitt (första) mandat var dess jämförelsetal $J_1 = r_1/1{,}4$, och detta var då det största jämförelsetalet. Ett annat parti i hade alltså då ett jämförelsetal $J_i \le J_1$; om det partiet tills dess hade fått m_i' mandat så är $J_i = r_i/1{,}4$ om $m_i' = 0$ och $J_i = r_i/(2m_i' + 1)$ om

$m'_i \geq 1$. Eftersom $m'_i \leq m_i$, och jämförelsetalet sjunker för ett parti som får fler mandat, leder detta till att, för varje $i \neq 1$,

$$\frac{r_1}{1{,}4} = J_1 \geq J_i \geq \begin{cases} \frac{r_i}{1{,}4}, & m_i = 0, \\ \frac{r_i}{2m_i+1}, & m_i \geq 1 \end{cases} \tag{4.1}$$

och alltså

$$r_i \leq \begin{cases} 1{,}4 J_1 = r_1, & m_i = 0, \\ (2m_i+1)J_1 = (2m_i+1)r_1/1{,}4, & m_i \geq 1. \end{cases} \tag{4.2}$$

Antag att ℓ andra partier får mandat, och alltså $n-1-\ell$ blir utan. Vi summerar (4.2) för $i = 2, \dots, n$ och får, eftersom övriga partier får högst $m-1$ mandat sammanlagt,

$$\begin{aligned} R &= r_1 + \sum_{i=2}^{n} r_i \leq r_1 + (n-1-\ell)r_1 + \Bigl(2\sum_{i=2}^{n} m_i + \ell\Bigr) J_1 \\ &= \Bigl(2\sum_{i=2}^{n} m_i + \ell + 1{,}4(n-\ell)\Bigr) J_1 \leq \bigl(2(m-1) + 1{,}4n - 0{,}4\ell\bigr) J_1 \\ &\leq \bigl(2m + 1{,}4n - 2{,}4\bigr) J_1 = \frac{2m + 1{,}4n - 2{,}4}{1{,}4} r_1, \end{aligned} \tag{4.3}$$

förutsatt att $\ell \geq 1$; i undantagsfallet $\ell = 0$ är $m_2 = \dots = m_n = 0$ och därför $2\sum_{i=2}^{n} m_i + \ell + 1{,}4(n-\ell) = 1{,}4n \leq 2m + 1{,}4n - 2{,}4$ (eftersom $m \geq 2$), och slutsatsen gäller då också.

Olikheten (4.3) ger

$$p_1 = \frac{r_1}{R} \geq \frac{1{,}4}{2m + 1{,}4n - 2{,}4} = \frac{0{,}7}{m + 0{,}7n - 1{,}2} = P_-. \tag{4.4}$$

Ett parti som får mandat måste alltså ha en andel röster minst P_-.

Andelen P_- kan verkligen räcka i extrema fall. Som exempel, låt (för ett godtyckligt valt tal a), partierna $1, \dots, n-1$ ha $7a$ röster var, medan parti n har $(10m-5)a$ röster. Parti n kommer då att ta de första $m-1$ mandaten, varefter det sista mandatet lottas ut (alla partier har samma jämförelsetal $5a$); mandatet kan alltså gå till parti 1 som har röstandel $p_1 = P_-$, och varje större röstandel skulle i detta exempel säkert ge ett mandat.

I undantagsfallet $m = 1$, när det bara finns ett mandat, går detta till det största partiet, som måste ha en röstandel $\geq 1/n$. Omvänt kan denna andel räcka: om alla partierna har lika många röster är deras andelar $1/n$ och ett av dem får mandatet efter lottning.

5. Minsta röstandel som säkert ger mandat

Antag att parti 1 inte fick något mandat: $m_1 = 0$. Partiet har då hela tiden jämförelsetalet $J_1 = r_1/1{,}4$. Om ett annat parti i fick $m_i \geq 1$ mandat så var dess jämförelsetal J_i när det fick sitt sista mandat alltså större än J_1, vilket ger

$$\frac{r_1}{1{,}4} = J_1 \leq \begin{cases} r_i/1{,}4, & m_i = 1, \\ r_i/(2m_i - 1), & m_i \geq 2. \end{cases} \tag{5.1}$$

Detta kan också skrivas

$$r_i \geq \begin{cases} r_1, & m_i = 1, \\ (2m_i - 1)r_1/1{,}4, & m_i \geq 2. \end{cases} \tag{5.2}$$

Antag att x andra partier fått exakt 1 mandat var, medan y tagit två mandat eller fler. Om $\mathcal{I} = \{i : m_i \geq 2\}$ betecknar mängden av partier med minst två mandat gäller då att antalet mandat dessa partier fått sammanlagt är

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} m_i = \sum_{i=2}^{n} m_i - x = m - x. \tag{5.3}$$

Om vi summerar (5.2) över alla i med $m_i = 1$ (x stycken) och $m_i \geq 2$ (y stycken) får vi

$$\begin{aligned} R = r_1 + \sum_{i=2}^{n} r_i &\geq r_1 + x r_1 + \sum_{i \in \mathcal{I}} (2m_i - 1)\frac{r_1}{1{,}4} \\ &= (1 + x)r_1 + \big(2(m - x) - y\big)\frac{r_1}{1{,}4} \\ &= \big(1{,}4 + 1{,}4x + 2m - 2x - y\big)\frac{r_1}{1{,}4} \\ &= \big(2m + 1{,}4 - 0{,}6x - y\big)\frac{r_1}{1{,}4}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Vi vill finna x och y som gör högerledet så litet som möjligt, vilket sker när $0{,}6x + y$ är så stort som möjligt. Men vi måste ha

$$x + y \leq n - 1 \tag{5.5}$$

$$x + 2y \leq m. \tag{5.6}$$

Man ser lätt att det finns tre olika fall:

(a) $m \leq n - 1$: I detta fall maximeras $0{,}6x + y$ av valet $x = m$, $y = 0$, vilket ger $0{,}6x + y \leq 0{,}6m$ för varje tillåtet val av x och y, och (5.4) ger

$$R \geq \big(2m + 1{,}4 - 0{,}6m\big)\frac{r_1}{1{,}4} = (m + 1)r_1. \tag{5.7}$$

(b) $n - 1 \leq m \leq 2(n - 1)$: I detta fall maximeras $0{,}6x + y$ av valet $x = 2(n - 1) - m$, $y = m - (n - 1)$, vilket ger $0{,}6x + y \leq 0{,}4m + 0{,}2(n - 1)$ för varje tillåtet val av x och y, och (5.4) ger

$$R \geq \big(2m + 1{,}4 - 0{,}4m - 0{,}2(n - 1)\big)\frac{r_1}{1{,}4} = \frac{0{,}8m + 0{,}8 - 0{,}1n}{0{,}7} r_1. \tag{5.8}$$

(c) $m \geq 2(n-1)$: I detta fall maximeras $0{,}6x+y$ av valet $x = 0$, $y = n-1$, vilket ger $0{,}6x + y \leq n - 1$ för varje tillåtet val av x och y, och (5.4) ger

$$R \geq \bigl(2m + 1{,}4 - (n-1)\bigr)\frac{r_1}{1{,}4} = \frac{m + 1{,}2 - 0{,}5n}{0{,}7} r_1. \tag{5.9}$$

I alla tre fallen kan detta skrivas

$$R \geq \frac{1}{P_+} r_1, \tag{5.10}$$

med P_+ given av (2.1)–(2.3), och alltså

$$p_1 = \frac{r_1}{R} \leq P_+. \tag{5.11}$$

Vi har visat att olikheten (5.11) är nödvändig om parti 1 inte får mandat. Omvänt gäller alltså att om $p_1 > P_+$ så måste partiet få minst ett mandat.

Denna gräns är också den bästa möjliga. Som exempel, låt x och y vara som ovan. Om $m \leq 2n - 2$, låt parti 1 och x andra partier ha $7a$ röster var, och y partier $15a$ röster var, där a är ett godtyckligt tal; om $m > 2n - 2$, låt parti 1 ha $7a$ röster, parti 2 $(10m - 20n + 35)a$, och övriga $n - 2$ partier $15a$ röster var. I båda fallen är $p_1 = P_+$, men parti 1 kan bli utan mandat om det har otur i lottningarna.

6. Minsta röstandel som troligen ger mandat

Låt oss dela ut mandat tills parti 1 får sitt första mandat; antag att detta är mandat nummer M. I verkligheten, med m mandat, får alltså parti 1 mandat (ett eller flera) om $M \leq m$, men inte om $M > m$.

Låt M_i vara antalet mandat som parti i får när M delas ut; vi har alltså $M_1 = 1$ och

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i. \tag{6.1}$$

Med M mandat går alltså det sista mandatet till parti 1, och är partiets första, och därför är det sista jämförelsetalet $J = r_1/1{,}4$. Om ett annat parti i har fått mandat (dvs $M_i \geq 1$) så var dess jämförelsetal när det sista mandatet delades ut $r_i/(2M_i + 1)$, medan partiets jämförelsetal när det fick sitt sista mandat var $r_i/(2M_i - 1)$, eller $r_i/1{,}4$ om $M_i = 1$. Därför gäller (även om $M_i = 1$, eftersom $r_i/1{,}4 < r_i$)

$$\frac{r_i}{2M_i + 1} \leq J \leq \frac{r_i}{2M_i - 1}, \tag{6.2}$$

vilket ger $r_i \leq (2M_i + 1)J$ och $(2M_i - 1)J \leq r_i$, och alltså

$$2M_i - 1 \leq \frac{r_i}{J} \leq 2M_i + 1. \tag{6.3}$$

Detta kan skrivas

$$M_i - \tfrac{1}{2} \leq \frac{r_i}{2J} \leq M_i + \tfrac{1}{2}, \tag{6.4}$$

vilket innebär att $M_i = \langle r_i/2J \rangle$, dvs $r_i/2J$ avrundat till närmaste heltal.

Detta gäller alltså om $M_i \geq 1$, vilket gäller om $r_i > r_1$, och kanske (efter lottning) om $r_i = r_1$, medan $M_i = 0$ om $r_i < r_1$.

Observera att eftersom $J = r_1/1{,}4$ så är

$$\frac{r_i}{2J} = \frac{r_i}{2r_1/1,4} = 0{,}7\frac{r_i}{r_1}. \tag{6.5}$$

Speciellt gäller $r_i \leq r_1$ om och endast om $r_i/2J \leq 0{,}7$.

Om vi vet det totala röstetalet $\sum_{i=2}^n r_i$ på övriga partier, men inte i detalj hur det fördelas mellan partierna, kan vi betrakta avrundningsfelen $r_i/2J - \langle r_i/2J\rangle$ som slumpmässiga och symmetriska kring 0, och detsamma för deras summa

$$\sum_{i=2}^n \bigl(r_i/2J - \langle r_i/2J\rangle\bigr) = \sum_{i=2}^n \Bigl(\frac{r_i}{2J} - M_i\Bigr) = \frac{\sum_{i=2}^n r_i}{2J} - \sum_{i=2}^n M_i. \tag{6.6}$$

Vi kan därför anta att om $\sum_{i=2}^n r_i/2J = m - \frac{1}{2}$ så kan summan $\sum_{i=2}^n M_i$ av $M_i = \langle r_i/2J\rangle$ lika gärna vara ett heltal större än $m - \frac{1}{2}$ (dvs $\geq m$) som ett mindre heltal (dvs $\leq m - 1$). (Vi bortser här för enkelhets skull från ev. partier mindre än parti 1, vilka inte kan få något mandat.) Eftersom $M = \sum_{i=2}^n M_i + 1$ betyder detta att vi kan anta att det är samma sannolikhet att $M \geq m+1$ som att $M \leq m$, vilket enligt ovan betyder att med m mandat är det lika stor sannolikhet att partiet inte får mandat som att det får det. Om $\sum_{i=2}^n r_i/2J$ är mindre än $m - \frac{1}{2}$ ökar sannolikheten att $M \leq m$ och att partiet alltså får mandat.

Slutsatsen är därför att ett kriterium för när det är troligt att parti 1 får minst ett mandat är

$$\sum_{i=2}^n 0{,}7\frac{r_i}{r_1} = \sum_{i=2}^n \frac{r_i}{2J} \leq m - 0{,}5 \tag{6.7}$$

eller

$$\sum_{i=2}^n r_i \leq \frac{m - 0{,}5}{0{,}7} r_1 \tag{6.8}$$

vilket är detsamma som

$$R = \sum_{i=1}^n r_i \leq \frac{m - 0{,}5}{0{,}7} r_1 + r_1 = \frac{m + 0{,}2}{0{,}7} r_1 \tag{6.9}$$

och

$$p_1 = \frac{r_1}{R} \geq \frac{0{,}7}{m + 0{,}2}. \tag{6.10}$$

Detta visar att $P_0 = 0{,}7/(m + 0{,}2)$ i sats 1(iii) är, ungefär, den röstandel som gör det troligare att partiet får ett mandat än att det inte får något, för normala fördelningar av rösterna mellan övriga partier. Men observera att antagandet om avrundningsfelen ovan är en rimlig approximation snarare än ett exakt påstående, så detta värde på P_0 skall ses som en approximation.

Valkrets	m	P_0	P_-	P_+	ja	%	nej	%	nytt %
Stockholm 2	15	4,61	3,61	5,74	V	4,50	KD	4,22	4,30
Stockholm 5	16	4,32	3,43	5,30	FP	8,81	C	3,49	4,09
Stockholm 6	16	4,32	3,43	5,30	V	7,31	KD	3,84	3,91
Stockholm 3	17	4,07	3,27	4,93	KD	4,42	V	3,62	4,00
Stockholm 4	17	4,07	3,27	4,93	FP	7,26	SD	3,79	3,68
Stockholm 1	20	3,47	2,87	4,07	C	4,36	KD	2,68	3,13
Uppsala M	27	2,57	2,23	2,89	KD	4,34	SD	2,26	2,35
Uppsala V	27	2,57	2,23	2,89	SD	3,09	FI	1,13	2,48
Uppsala Ö	27	2,57	2,23	2,89	SD	4,62	PP	0,84	2,41
Arjeplog	31	2,24	2,10	2,36	MP	4,52	M	0,92	2,14
Arvidsjaur	31	2,24	1,98	2,48	SD	2,44	MP	1,73	2,23
Knivsta	31	2,24	1,94	2,53	SD	2,64	USV	0,03	2,33
Övertorneå	31	2,24	1,98	2,48	ÖFA	2,45	FP	1,31	2,14
Gällivare	41	1,70	1,54	1,83	MP	1,70	FP	1,32	1,66
Eksjö	49	1,42	1,31	1,52	FP	4,62	V	1,17	1,41
Ystad	49	1,42	1,31	1,52	V	1,91	SPI	1,10	1,40

Tabell 1. Några exempel från kommunalvalet 2010. Alla röstandelar i procent.

Anmärkning 6.1. Observera att härledningen ovan ignorerar ev. partier mindre än det studerade partiet; om fler små partier finns torde därför lite färre röster räcka, varför P_0 är lite i överkant.

7. Exempel

Vi illustrerar de generella resultaten ovan med några exempel från kommunalvalet 2010. I tabell 1 visas för några valkretsar av olika storlek. Antalet mandat i kommunvalkretsar varierar mellan 15 och 49, och vi ger exempel på båda ytterligheterna, liksom på några mellanliggande storlekar.[4]

Tabellen visar mandattal m och de tre teoretiskt beräknade värdena P_+, P_-, P_0 enligt sats 1; för P_+ och P_- som beror på antalet partier har vi här räknat med $n = 8$ partier i alla fall utom $n = 5$ för Arjeplog och $n = 9$ för Knivsta.[5] Därefter följer (kolumnen "ja") det minsta parti som fick mandat och ("nej") det största parti som inte fick mandat. Slutligen visas den andel

[4]Enligt Kommunallagen [1, 5 kap. 1 §] skall antalet ledamöter i fullmäktige vara minst 31, och större för större kommuner enligt en viss skala. Enligt Vallagen [5, 4 kap. 12 §] skall kommuner med minst 51 ledamöter vara indelade i två eller flera valkretsar, och mindre kommuner kan vara det; valkretsarna skall vara av ungefär samma storlek, och med minst 15 ledamöter var. Eftersom endast Stockholm, med 6 valkretsar, har över 100 ledamöter, och näst största fullmäktige (Norrköping) har 85, varierar alltså antalet mandat i kommunvalkretsarna mellan 15 och 49.

[5]Vid användandet av formlerna i praktiken bör man ignorera mycket små partier, och det är en bedömningsfråga vilka som skall räknas. Men som synes av exemplen med 31 mandat spelar detta normalt mycket liten roll, och P_0 påverkas inte alls. I Knivsta blev 9 partier representerade i fullmäktige, och endast 8 röster lades på andra partier.

röster ett hypotetiskt nytt parti skulle ha behövt för att få ett mandat; det nya partiet antas värva röster bland soffliggarna så att övriga partiers röstetal är oförändrade.[6] (Tabellen bygger på uppgifter från länsstyrelsernas protokoll, hämtade från Valmyndighetens webbplats [6].)

Man ser att röstandelen för ett fiktivt nytt parti alltid ligger nära P_0, och i nästan alla fall är något mindre.

8. Andra valmetoder

Som jämförelse ger vi motsvarande naturliga spärrar för (ojämkade) uddatalsmetoden (Sainte-Laguës metod) och heltalsmetoden (d'Hondts metod). Gränserna P_+ och P_- i dessa fall är välkända, se t.ex. Kopfermann [10, Satz 6.2.11] och [8].

Sats 2. *För (ojämkade) uddatalsmetoden gäller följande, om m mandat i en valkrets fördelas på n partier.*

(i) *Den minsta röstandel som* garanterar *minst ett mandat är*

$$P_+ = \frac{1}{2m-n+2} \qquad \text{om} \quad m \geq n-1, \tag{8.1}$$

$$P_+ = \frac{1}{m+1} \qquad \text{om} \quad m \leq n-1. \tag{8.2}$$

(ii) *Den minsta röstandel som gör det* möjligt *att få ett mandat är*

$$P_- = \frac{1}{2m+n-2}. \tag{8.3}$$

(iii) *Den minsta röstandel som gör det* troligt *att få minst ett mandat är*

$$P_0 = \frac{1}{2m}. \tag{8.4}$$

Sats 3. *För heltalsmetoden gäller följande, om m mandat i en valkrets fördelas på n partier.*

(i) *Den minsta röstandel som* garanterar *minst ett mandat är*

$$P_+ = \frac{1}{m+1}. \tag{8.5}$$

(ii) *Den minsta röstandel som gör det* möjligt *att få ett mandat är*

$$P_- = \frac{1}{m+n-1}. \tag{8.6}$$

(iii) *Den minsta röstandel som gör det* troligt *att få minst ett mandat är*

$$P_0 = \frac{1}{m+0{,}5n}. \tag{8.7}$$

[6]Det kan se ut som en motsägelse i Stockholm 4 att det nya partiet bara skulle behöva 3,68%, trots att SD i verkligheten fick 3,79% men blev utan. Förklaringen är att det nya partiet antas tillföra nya röster, vilket minskar t.ex. SD:s andel till 3,65%. I antal röster fick SD 3167 röster, och de eller ett nytt parti hade behövt 3192 röster för att få ett mandat.

Dessa satser kan bevisas på samma sätt som sats 1 (fast något enklare), och vi hoppar över de flesta av detaljerna. För beräkningen av P_0 får vi för uddatalsmetoden

$$M_i = \langle r_i/2J \rangle \tag{8.8}$$

och för heltalsmetoden

$$M_i = \langle r_i/J - 0{,}5 \rangle, \tag{8.9}$$

där i båda fallen $J = r_1$. Samma argument som ovan ger för uddatalsmetoden kriteriet

$$\frac{R - r_1}{2r_1} = \sum_{i=2}^{n} \frac{r_i}{2r_1} = \sum_{i=2}^{n} \frac{r_i}{2J} \le m - 0{,}5, \tag{8.10}$$

vilket är detsamma som

$$R \le 2mr_1 \tag{8.11}$$

eller

$$p_1 = \frac{r_1}{R} \ge \frac{1}{2m}, \tag{8.12}$$

vilket ger (8.4).

För heltalsmetoden får vi istället från (8.9) kriteriet

$$\frac{R - r_i}{r_i} - \frac{n-1}{2} = \sum_{i=2}^{n} \Big(\frac{r_i}{J} - 0{,}5 \Big) \le m - 0{,}5 \tag{8.13}$$

vilket är detsamma som

$$R \le \big(m + n/2\big) r_1; \tag{8.14}$$

detta ger

$$p_1 = \frac{r_1}{R} \ge \frac{1}{m + n/2} \tag{8.15}$$

och (8.7).

Den naturliga spärren kan alltså tas som $1/2m$ för uddatalsmetoden och $1/(m + 0{,}5n)$ för heltalsmetoden. (I det senare fallet beror den alltså inte bara på antalet mandat utan också på antal partier, där man bör bortse från extremt små partier och bara räkna partier med rimlig chans att ta mandat.)

Anmärkning 8.1. Heltalsmetoden används i Sverige vid proportionella val inom riksdag, kommunfullmäktige mm (av t.ex. riksdagsutskott och kommunala nämnder), se [4, 7 kap. 4 §] och [2, 20–22 §]. Det faktum att en röstandel på mer än $P_+ = 1/(m + 1)$ garanterar en plats (sats 3(i)), medan en lägre röstandel inte ger någon plats om övriga partier står enade emot (sats 3(ii) med $n = 2$) är vad som ligger bakom stadgandena att valen sker med acklamation om inte votering med slutna sedlar begärs av en grupp på minst $1/(m + 1)$ av alla ledamöter [4, 7 kap. 3 §] och [2, 2 §].

REFERENSER

[1] *Kommunallag.* SFS 1991:900.
[2] *Lag om proportionellt valsätt.* SFS 1992:339.
[3] *Regeringsformen.* SFS 1974:152.
[4] *Riksdagsordningen.* SFS 1974:153.
[5] *Vallag.* SFS 2005:837.
[6] *Val till kommunfullmäktige – Valda.* Valmyndigheten, 2010. http://www.val.se/val/val2010/slutresultat/K/rike/valda.html
[7] *Två ytterligare ledamöter i Europaparlamentet.* Valmyndigheten, 2011. http://www.val.se/om_oss/nyheter/index.html
Se även Valmyndighetens protokoll http://www.val.se/tidigare_val/ep2009/Beslut_bilagor_till%20webben_mep2011.pdf
[8] Svante Janson, Asymptotic bias of some election methods. Preprint, 2011. http://arxiv.org/abs/1110.6369
[9] Svante Janson och Svante Linusson, SD fick två mandat för mycket i landstingsvalet. *Svenska Dagbladet, nätupplagan,* 24 oktober 2010. http://www.svd.se/5551087.svd
[10] Klaus Kopfermann, *Mathematische Aspekte der Wahlverfahren.* Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1991.

Matematiska institutionen, Uppsala universitet, Box 480, 751 06 Uppsala
E-post: svante.janson@math.uu.se
URL: http://www.math.uu.se/~svante/