Problem med proportionella val av kommunala nämnder: matematiken bakom två kuppförsök i Uppsala 2018.

Svante Janson

Kollokvium, Uppsala
2 december 2021

Val 2018

9/9 2018: Allmänna val till riksdag, regionfullmäktige och kommunfullmäktige.

Dessa väljer sedan riksdagsutskott, kommunala nämnder och styrelser mm.

Exempel:

Region Uppsala. Regionfullmäktige har 71 ledamöter.

Valresultat 2018:

13 M, 7 C, 6 KD, 5 L, 4 MP, 20 S, 7 V, 9 SD.

Exempel:

Region Uppsala. Regionfullmäktige har 71 ledamöter.

Valresultat 2018:

13 M, 7 C, 6 KD, 5 L, 4 MP, 20 S, 7 V, 9 SD.

M+C+KD+L+MP enades om ett minoritetsstyre med 35 av 71 mandat.

Exempel:

Region Uppsala. Regionfullmäktige har 71 ledamöter.

Valresultat 2018:

13 M, 7 C, 6 KD, 5 L, 4 MP, 20 S, 7 V, 9 SD.

M+C+KD+L+MP enades om ett minoritetsstyre med 35 av 71 mandat.

28/11 2018: Regionfullmäktige väljer regionsstyrelse (med 19 ledamöter). SD begär sluten votering, enligt Lagen om proportionellt valsätt (1992:339).

Röster:

35 Blågröna gruppen i Region Uppsala. (En gemensam lista med 10 namn, varav 4 M, 2 C, 2 KD, 1 L, 1 MP.)

20 Arbetarepartiet Socialdemokraterna. (En lista med 5 namn, alla S.)

9 Socialdemokratiska arbetarpartiet. (En lista med 3 namn, alla SD.)

7 Röda V. (En lista med 5 namn, alla V.)

Röster:

35 Blågröna gruppen i Region Uppsala. (En gemensam lista med 10 namn, varav 4 M, 2 C, 2 KD, 1 L, 1 MP.)

20 Arbetarepartiet Socialdemokraterna. (En lista med 5 namn, alla S.)

9 Socialdemokratiska arbetarpartiet. (En lista med 3 namn, alla SD.)

7 Röda V. (En lista med 5 namn, alla V.)

VARFÖR?

Proportionella val i fullmäktige sker på ett sätt som liknar allmänna val, men det finns också viktiga skillnader.

Valen är slutna, med valsedlar i en urna. Normalt röstar ett partis ledamöter som partiet beslutat, men det finns inget tvång på det, och ingen formell möjlighet att kontrollera det.

1. Det är vanligt att två eller flera partier kommer överens om en valkartell (valteknisk samverkan) så att deras röster räknas ihop.

Varje valsedel har därför ett "gruppnamn" (istället för partinamn) och under det en numrerad lista med kandidater.

Gruppnamn och kandidater anmäls inte i förväg. (Till skillnad från allmänna val, numera.)

2. Platserna fördelas mellan grupperna (dvs gruppnamnen) med heltalsmetoden (d'Hondts metod).

Vid alla allmänna val används jämkade uddatalsmetoden.

3. Om det finns flera olika listor med samma gruppbeteckning fördelas platserna mellan kandidaterna med Thieles metod.

Vid allmänna val, och vid val till riksdagens utskott, används istället Phragméns metod.

Normalt har en valkartell antingen en gemensam lista man kommit överens om, eller en lista för varje parti i kartellen. I de fallen ger metoderna samma resultat.

3. Om det finns flera olika listor med samma gruppbeteckning fördelas platserna mellan kandidaterna med Thieles metod.

Vid allmänna val, och vid val till riksdagens utskott, används istället Phragméns metod.

Normalt har en valkartell antingen en gemensam lista man kommit överens om, eller en lista för varje parti i kartellen. I de fallen ger metoderna samma resultat.

I mer komplicerade fall kan Thieles metod ge problem.

Phragméns metod är bättre!

Heltalsmetoden

D'Hondt (1882), Jefferson (1792)

Platserna fördelas ett i taget. Varje plats tilldelas det parti som då har det största jämförelsetalet. Jämförelsetalet för ett parti är antalet röster delat med $1+$ antalet platser som partiet har fått hittills.

Alternativ formulering:

Bestäm ett "pris" D röster för varje plats. Ett parti (grupp) med r röster får r/D platser, avrundat nedåt till heltal. D bestäms så att totalantalet valda blir rätt.

Heltalsmetoden

D'Hondt (1882), Jefferson (1792)

Platserna fördelas ett i taget. Varje plats tilldelas det parti som då har det största jämförelsetalet. Jämförelsetalet för ett parti är antalet röster delat med 1+ antalet platser som partiet har fått hittills.

Alternativ formulering:

Bestäm ett "pris" D röster för varje plats. Ett parti (grupp) med r röster får r/D platser, avrundat nedåt till heltal. D bestäms så att totalantalet valda blir rätt.

Övning 1: Visa att dessa formuleringar ger samma resultat!

Heltalsmetoden

D'Hondt (1882), Jefferson (1792)

Platserna fördelas ett i taget. Varje plats tilldelas det parti som då har det största jämförelsetalet. Jämförelsetalet för ett parti är antalet röster delat med $1+$ antalet platser som partiet har fått hittills.

Alternativ formulering:

Bestäm ett "pris" D röster för varje plats. Ett parti (grupp) med r röster får r/D platser, avrundat nedåt till heltal. D bestäms så att totalantalet valda blir rätt.

Övning 1: Visa att dessa formuleringar ger samma resultat!

Hjälp: Sista jämförelsetalet fungerar som pris D.

Exempel: Region Uppsala. Jämförelsetal

1. BG 35; S 20; SD 9; V 7. Vald: BG
2. BG $35/2 = 17{,}5$; S 20; SD 9; V 7. Vald: S
3. BG 17,5; S $20/2 = 10$; SD 9; V 7. Vald: BG
4. BG $35/3 = 11{,}67$; S 10; SD 9; V 7. Vald: BG
5. BG $35/4 = 8{,}75$; S 10; SD 9; V 7. Vald: S
6. BG 8,75; S $20/3 = 6{,}67$; SD 9; V 7. Vald: SD

...

18. BG $35/10 = 3{,}5$; S $20/6 = 3{,}33$; SD $9/3 = 3$; V $7/2 = 3{,}5$. Vald: BG eller V. Lottning: V

19. BG $35/10 = 3{,}5$; S $20/6 = 3{,}33$; SD $9/3 = 3$; V $7/3 = 2{,}33$. Vald: BG

Resultat: BG 10; S 5; SD 2; V 2

$35/3{,}5 = 10$; $20/3{,}5 = 5{,}71$; $9/3{,}5 = 2{,}57$; $7/3{,}5 = 2$

Allmänbildning:

Vid allmänna val i Sverige används jämkade uddatalsmetoden. Där får man jämförelsetal genom att dela med 1,2, 3, 5, 7, ...

Jämkningen från 1 till 1,2 (före 2018 1,4) fungerade ursprungligen som småpartispärr. Sedan utjämningsmandat införs påverkar den inte mandatfördelningen mellan partier, men kan påverka fördelningen av mandat inom partier mellan valkretsar.

Bortsett från jämkningen till 1,2, ger uddatalsmetoden samma resultat som att sätta ett lämpligt "pris" D och avrunda kvoten r/D till närmaste heltal.

Allmänbildning:

Vid allmänna val i Sverige används jämkade uddatalsmetoden. Där får man jämförelsetal genom att dela med 1,2, 3, 5, 7, ...

Jämkningen från 1 till 1,2 (före 2018 1,4) fungerade ursprungligen som småpartispärr. Sedan utjämningsmandat införs påverkar den inte mandatfördelningen mellan partier, men kan påverka fördelningen av mandat inom partier mellan valkretsar.

Bortsett från jämkningen till 1,2, ger uddatalsmetoden samma resultat som att sätta ett lämpligt "pris" D och avrunda kvoten r/D till närmaste heltal.

Övning 2: Visa att dessa formuleringar ger samma resultat!

Allmänbildning:

Vid allmänna val i Sverige används jämkade uddatalsmetoden. Där får man jämförelsetal genom att dela med 1,2, 3, 5, 7, ...

Jämkningen från 1 till 1,2 (före 2018 1,4) fungerade ursprungligen som småpartispärr. Sedan utjämningsmandat införs påverkar den inte mandatfördelningen mellan partier, men kan påverka fördelningen av mandat inom partier mellan valkretsar.

Bortsett från jämkningen till 1,2, ger uddatalsmetoden samma resultat som att sätta ett lämpligt "pris" D och avrunda kvoten r/D till närmaste heltal.

Övning 2: Visa att dessa formuleringar ger samma resultat!

Hjälp: Att dela med de udda talen 1, 3, 5, . . . ger samma valresultat som att dela med $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, . . .

Sats: Heltalsmetoden är superadditiv: två eller flera partier kan aldrig förlora på att bilda kartell.

Bevis: Med samma pris D har de tillsammans råd med minst lika många platser som var för sig. Skulle de ha råd med fler måste priset höjas, och då kan inget annat parti få fler platser. VSB

Sats: Heltalsmetoden är superadditiv: två eller flera partier kan aldrig förlora på att bilda kartell.

Bevis: Med samma pris D har de tillsammans råd med minst lika många platser som var för sig. Skulle de ha råd med fler måste priset höjas, och då kan inget annat parti få fler platser. VSB

Följdsats: En koalition som har majoritet i fullmäktige får alltid majoritet i styrelser och nämnder.

Bevis: Det värsta som kan hända majoriteten är att alla andra också går ihop i en kartell. Men med bara två grupper får den största flest platser.

Exempel: Region Uppsala. SD röstar med S

BG 35; S + SD 29; V 7

Heltalsmetoden ger BG 9; S + SD 8; V 2. (S + SD tar en plats från BG.)

De 8 platserna S + SD skulle fördelas mellan de två listorna med S 6, SD 2. Men S har bara 5 namn på sin lista, så den sista platsen går till SD.

Resultat: BG 9; S 5; SD 3; V 2. (SD har tagit en plats från BG.)

Exempel:

Uppsala kommun. Kommunfullmäktige fick i valet 2018 81 ledamöter från 9 partier: 21 S, 14 M, 9 V, 8 C, 8 L, 7 SD, 6 KD, 6 MP, 2 FI.

Exempel:

Uppsala kommun. Kommunfullmäktige fick i valet 2018 81 ledamöter från 9 partier: 21 S, 14 M, 9 V, 8 C, 8 L, 7 SD, 6 KD, 6 MP, 2 FI.

Kommunen styrs av en minoritetskoalition S+L+MP med 35 mandat.

Exempel:

Uppsala kommun. Kommunfullmäktige fick i valet 2018 81 ledamöter från 9 partier: 21 S, 14 M, 9 V, 8 C, 8 L, 7 SD, 6 KD, 6 MP, 2 FI.

Kommunen styrs av en minoritetskoalition S+L+MP med 35 mandat.

10/12 2018: fullmäktige väljer bl.a. nämnder. I två fall, begärs av SD (7 ledamöter) att lagen om proportionella val skall användas.

Den styrande koalitionen S+L+MP bildar en valteknisk kartell med V och FI (46 röster). M+KD+C bildar en kartell (28 röster). Med endast dessa karteller skulle rösterna ha fördelats som:

46 Mittenstyret och vänsteroppositionen, med en gemensam lista

28 Uppsala-Alliansen med tre olika listor för M, C, KD.

7 SD

Arbetsmarknandsnämnden har 13 platser.
Heltalsmetoden hade givit
"Mittenstyret och vänsteroppositionen" 8 platser, (fördelade enligt gemensamma listan som S 5, L 1, MP 1, V 1)
Uppsala-Alliansen 4 platser (M 2, C 1, KD 1)
SD 1 plats.

SD valde dock att ingå en oönskad kartell med Uppsala-Alliansen. Om inga andra förändringar hade skett skulle resultatet ha blivit:

46 Mittenstyret och vänsteroppositionen, en gemensam lista

35 Uppsala-Alliansen (i oönskad kartell med SD), fyra olika listor för M, C, KD, SD.

Eftersom $46/8 < 35/6$ så hade resultatet blivit:
"Mittenstyret och vänsteroppositionen" 7 platser (fördelade enligt gemensamma listan som S 4, L 1, MP 1, V 1)
Uppsala-Alliansen 6 platser (M 3, C 1, KD 1, SD 1))

SD hade alltså inte fått någon extra plats, men deras kupp skulle ha givit M en plats på bekostnad av S. Därmed hade inte minoritetsstyret S+MP+L fått majoritet i nämnden. Även om SD själva inte skulle ha fått någon mer plats så hade de tjänat på att den styrande mittenkartellen hade varit tvingad att söka stöd hos något annat parti i varje omröstning.

Nu blev resultatet inte detta. Fullmäktiges ordförande krävde före omröstningen att Uppsala-Alliansens partier skulle acceptera röster från SD, annars skulle hon inte godkänna dessa. Gruppledarna deklarerade att de accepterade röster från alla som ville rösta på dem. Men alla i C höll tydligen inte med.

Det som hände vid omröstningen till arbetsmarknadsnämnden var:

46 Mittenstyret och vänsteroppositionen, med en gemensam lista
32 Uppsala-Alliansen, med fyra listor för M (15), KD (6), C (4), SD (7).
3 blanka

Uppenbarligen hade av de 8 ledamöterna för C (en numera partilös) bara 4 röstat på C:s lista, 1 på M och 3 blankt.

Resultat:
Mittenstyret och vänsteroppositionen 8 platser
Uppsala-Alliansen 5 platser (M 3, KD 1, SD 1).

Effekten av SD:s kupp och splittringen i C tillsammans blev bara att C förlorade sin plats i nämnden till M.

Motåtgärder?

1. Hemliga gruppnamn
2. Ändra eller avstå från karteller
3. Reservnamn
4. Karteller ska godkännas av partierna
5. Föranmälda kandidater
6. Olika namnlistor räknas som olika grupper

Alla har nackdelar

Del II. Kupper med splittrade listor

Om det finns flera listor i en grupp fördelas platserna med

Thieles metod:

1. Platserna fördelas en i taget.
2. I varje omgång räknas varje valsedel för en kandidat: den första som inte redan är vald.
3. Om k tidigare namn redan är valda räknas valsedeln som $1/(k+1)$ röst.

Detta är enkelt och fungerar bra när olika listor har olika namn.

Del II. Kupper med splittrade listor

Om det finns flera listor i en grupp fördelas platserna med

Thieles metod:

1. Platserna fördelas en i taget.
2. I varje omgång räknas varje valsedel för en kandidat: den första som inte redan är vald.
3. Om k tidigare namn redan är valda räknas valsedeln som $1/(k+1)$ röst.

Detta är enkelt och fungerar bra när olika listor har olika namn.

Övning 3: Visa att i detta fall blir det samma resultat som med heltalsmetoden mellan listorna.

Del II. Kupper med splittrade listor

Om det finns flera listor i en grupp fördelas platserna med

Thieles metod:

1. Platserna fördelas en i taget.
2. I varje omgång räknas varje valsedel för en kandidat: den första som inte redan är vald.
3. Om k tidigare namn redan är valda räknas valsedeln som $1/(k+1)$ röst.

Detta är enkelt och fungerar bra när olika listor har olika namn.

Övning 3: Visa att i detta fall blir det samma resultat som med heltalsmetoden mellan listorna.

Metoden fungerar ibland uselt när flera listor har delvis samma namn, kanske i olika ordning.

Exempel (utredningar 1913 och 1954):

Fullmäktige har 100 ledamöter. En koalition har majoritet med 56 mandat, och oppositionen har 44. En nämnd på 3 personer ska väljas. Majoriteten räknar med 2 platser, och röstar alla på en lista med Anna och Bo, och gruppnamn "Majoriteten".

Oppositionen gör en kupp, och röstar också med gruppnamn Majoriteten, men på två olika listor.

Resultat: 100 röster för Majoriteten, därav

56 Anna, Bo

29 Cecilia, David

15 David

Anna får första platsen. Andra platsen går till Cecilia (29 röster mot Bo $56/2 = 28$). För tredje platsen har Bo $56/2 = 28$ röster, och David $29/2 + 15 = 29{,}5$.

Valda: Anna, Cecilia, David

Denna typ av kupp betyder att man kan lura sina kartellkamrater på platser.

Det är knappast realistiskt vid överenskomna karteller, eftersom fortsatt samarbete nog inte är möjligt.

Men vid en ofrivillig kartell finns inga sådana spärrar, så detta är en reell risk, även om sådana kupper ännu inte har hänt.

Exempel (hypotetiskt):

Antag att i Region Uppsala, SD röstar med samma gruppnamn som S, men två olika listor: 5 XYZ och 4 ZYX. Resultatet:

- 35 Blågröna gruppen i Region Uppsala.
- 29 Arbetarpartiet Socialdemokraterna. Tre listor:
  - 20 ABCDEF (S)
  - 5 XYZ (SD)
  - 4 ZYX (SD)
- 7 Röda V.

Liksom tidigare skulle S+SD ha fått 8 platser. Dessa skulle ha delats ut i följande ordning (med röstetal inom parentes):
A (20), B (10), C (6,667), D och X (5), E och Z (4), Y (4,5).

Summa S 5; SD 3. SD skulle alltså ha fått 3 av platserna; de hade alltså vunnit en plats (från M) med sin kupp.

Exempel (hypotetiskt, del 2):

Antag att S fått nys om SD:s planer, och efter att ha konsulterat matematisk expertis fördelar sina 20 röster:

5 ABCDEFG
1 ABDEFG
3 BCDEFG
3 CDEFG
2 DEFG
2 EFG
2 FG
2 G

Liksom tidigare skulle S+SD ha fått 8 platser. Av dessa skulle S få 7 och SD bara 1: A (6), B (6), C (6,167), D (6,083), E (6), F (6,05), G (6,148), X (5). S skulle ta 1 plats från M och 1 från SD.

Exempel (hypotetiskt, Uppsala kommun):

Antag att M+KD+C hade välkomnat SD till Uppsala-alliansen, men i hemlighet gjort upp om att fördela sina 28 röster:

8 ADF

8 BDF

8 CEF

4 EF

Med SD skulle Uppsala-alliansen få 35 röster och 6 platser, av dessa skulle SD få 0 och M+KD+C 6. Det skulle inte hjälpa SD att själva splittra listorna.

Phragméns metod

Problemen med splittrade listor försvinner om man byter till Phragméns metod istället. Den är mer komplicerad, men får inte konstiga effekter vid splittrade listor.

Metoden används sedan 1921 vid allmänna val, och sedan 1956 vid utskottsval i riksdagen, men den ansågs då för komplicerad för små kommuner.

Metoden fugerar ungefär som Thieles, men värdet på valsedlar reduceras på ett mer komplicerat sätt när någon blir vald.

Phragméns metod (en motivering)

Phragméns metod:

1. Platserna fördelas en i taget.
2. I varje omgång räknas varje valsedel för en kandidat: den första som inte redan är vald.
3. Varje valsedel har en "väljkraft" (röstvärde). Denna ökar kontinuerligt från 0, med samma hastighet för alla valsedlar.
4. När valsedlarna för en kandidat har sammanlagd väljkraft 1, blir denna kandidat vald. Dessa valsedlar nollställs, medan alla andra valsedlar behåller sin väljkraft. Därefter ökas väljkraften på alla valsedlar igen, med samma hastighet.

Phragmén gör också en analogi med vätska som stiger i cylindriska kärl motsvarande de olika valsedlarna.

Phragméns metod (enligt vallagen)

Vid varje uträkning gäller varje valsedel för det namn som står först på valsedeln, bortseende från de som redan är valda.

Varje valsedel har ett platstal. Detta platstal är vid första uträkningen 0.

Vid varje uträkning beräknas för varje kandidat ett röstetal R, ett platstal P och ett jämförelsetal J. Röstetalet R är antalet valsedlar som gäller för kandidaten, platstalet P är summan av deras platstal, och jämförelsetalet beräknas som

$$J = \frac{R}{P+1}.$$

Den kandidat som har det största jämförelsetalet får nästa plats. De valsedlar som räknades för denna kandidat får sitt platstal ändrat till $1/J$. (Övriga valsedlars platstal är oförändrat.)

Phragméns metod (enligt vallagen)

Vid varje uträkning gäller varje valsedel för det namn som står först på valsedeln, bortseende från de som redan är valda.

Varje valsedel har ett platstal. Detta platstal är vid första uträkningen 0.

Vid varje uträkning beräknas för varje kandidat ett röstetal R, ett platstal P och ett jämförelsetal J. Röstetalet R är antalet valsedlar som gäller för kandidaten, platstalet P är summan av deras platstal, och jämförelsetalet beräknas som

$$J = \frac{R}{P+1}.$$

Den kandidat som har det största jämförelsetalet får nästa plats. De valsedlar som räknades för denna kandidat får sitt platstal ändrat till $1/J$. (Övriga valsedlars platstal är oförändrat.)

Övning 4: Visa att i dessa beskrivningar av Phragméns metod ger samma resultat.

Biografier

Thorvald Thiele (1838-1910) var en dansk astronom, matematiker och statistiker; han införde bl.a. kumulanter.

Edvard Phragmén (1863-1937) var en svensk matematiker, nära medarbetare till Gösta Mittag-Leffler och redaktör för Acta Mathematica i många år; nu är han kanske mest känd för Phragmén-Lindelöfs sats i komplex analys.

Båda var intresserade av valsystem, och föreslog sina metoder 1895 resp. 1894 (i lite annan form än nuvarande).

Dessutom var båda intresserade av försäkringsmatematik och blev direktörer i försäkringsbolag.