Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

1. Beräkna $\lim_{x\to\infty} x^2(e^{-1/x^2}-1)$.

2. Lös ekvationen $y'' - y = \sin x$.

3. Ett fönster har formen av en rektangel på vilken står en överdel i form av en halvcirkel. Den halvcirkelformade delen släpper igenom hälften så mycket ljus som den rektangelformade delen per areaenhet. Bestäm fönstrets proportioner så att genomsläppet av ljus blir maximalt om fönstrets omkrets är ett fixt tal.

4. Bestäm integralerna

$$a)\quad \int \frac{\cos x}{\sin x \ln(\sin x)}\,dx \qquad\qquad b)\quad \int x^3 e^{x^2}\,dx.$$

5. Skissera kurvan

$$y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x(x-1)}}.$$

Ange särskilt dess definitionsmängd och asymptoter.

6. Lös differentialekvationen

$$y'(1+x^2) + xy = \sqrt{1+x^2}$$

7. Beräkna volymen av den rotationskropp som uppstår då ytstycket som begränsas av $x = \dfrac{1}{\cos y}$, $x = 0$, $y = 0$, $y = \pi/3$ roterar kring $y-$axeln.

8. Konvergerar eller divergerar serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{1/\sqrt{n}} \ln(1+\frac{1}{n}) \quad ?$$

9. För vilka värden på m är linjen $y = mx$ tangent till kurvan $y^2 + x^2 - 4x + 3 = 0$?

10. För vilka värden på konstanterna a, b, c är funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \le 0 \\ ax^2 + bx + c, & x > 0 \end{cases}$$

en 1-1 funktion deriverbar i $x = 0$?

SVAR V.G.V!

SVAR

1. -1
2. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x$.
3. Rektangelns höjd$=(4+\pi)/8$ gånger halvcirkelns diameter.
4. a) $\ln|\ln(\sin x)| + C$. b) $\frac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2} + C$.
5. Funktionen är definierad för $x > 1$ och $x < 0$. $y = 1$ är horisontell asymptot. Kurvan ligger under $y = 1$ för stora $x < 0$ och ovanför $y = 1$ för stora $x > 0$. $x = 0$ är vertikal asymptot.
6. $y = \dfrac{x+C}{\sqrt{1+x^2}}$.
7. $\pi\sqrt{3}$.
8. Divergerar. Jämför med harmoniska serien. Limit comparison med Maclaurinserier.
9. $m = \pm 1/\sqrt{3}$. Observera att kurvans ekvation kan skrivas $(x-2)^2 + y^2 = 1$ varav framgår att kurvan är en cirkel med centrum i $(2,0)$ och radien 1.
10. $a \geq 0$, $b = 1$, $c = 0$.