

Sannolikhet och statistik

Stokastiska variabler

HT 2008

Uwe.Menzel@math.uu.se

<http://www.math.uu.se/~uwe/>

Stokastisk variabel, slumpvariabel (s.v.):

Funktion: Resultat av slumpförsök $\Rightarrow$ (reell) tal

$$\Omega \Rightarrow \mathbb{R}$$

Myntkast:

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{om } \omega = \text{klave;} \\ 1 & \text{om } \omega = \text{krona.} \end{cases}$$

Exempel för diskreta och kontinuerliga stokastiska variabler

Diskret: s.v kan anta ett ändligt (uppräknligt ∞) antal olika värden

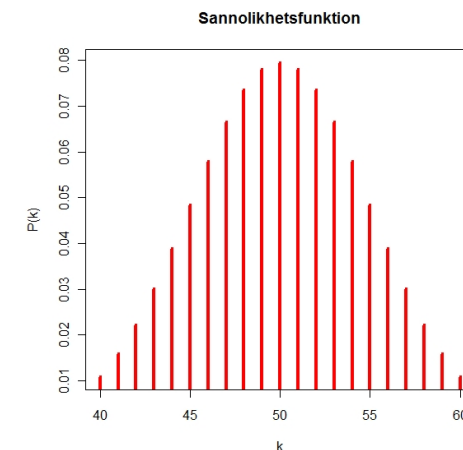
- ▶ X = resultat av **en kast** med tärning $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- ▶ Y = **antalet** femmor i 100 tärningskast $\Omega = \{0, 1, \dots, 100\}$
- ▶ Z = antalet kast tills man får tre 5:or i rad $\Omega = \{3, 4, \dots, \infty\}$

Kontinuerligt: s.v kan anta alla reella tal i ett intervall

- ▶ X = livslängd av en glödlampa $\Omega = \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$
- ▶ Y = vikt av en regndroppe
- ▶ Z = omkrets av ett tillfälligt utvalt träd i en skog

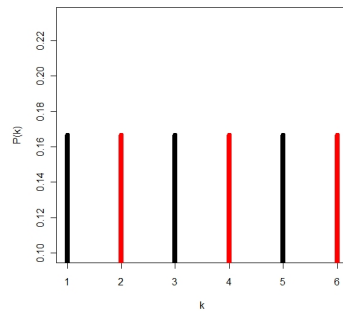
Sannolikhetsfunktion för diskreta slumpvariabler

$$p_X(k) = P(X = k)$$



Diskreta slumpvariabler: Sannolikhet för händelser

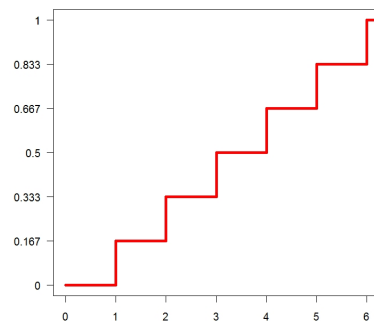
$$P(X \in A) = \sum_{k \in A} p_X(k)$$



$$P(X \in \text{even}) = \sum_{k \in \text{even}} p_X(k) = \sum_{k=2,4,6} p_X(k) = p_X(2) + p_X(4) + p_X(6) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$$

Diskreta slumpvariabler: Fördelningsfunktion

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{k \leq x} p_X(k)$$

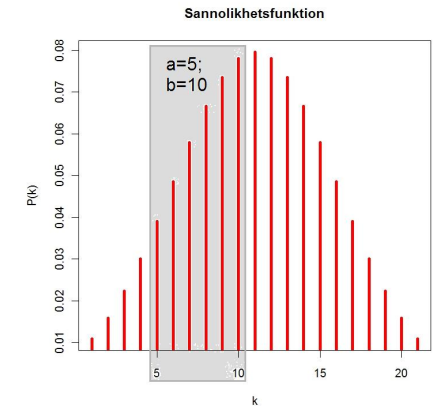


Figur: Fördelningsfunktion för tärning

Diskreta slumpvariabler: Sannolikhet för händelser

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{k=a}^b p_X(k)$$

$$P(a < X \leq b) = \sum_{k=a+1}^b p_X(k)$$

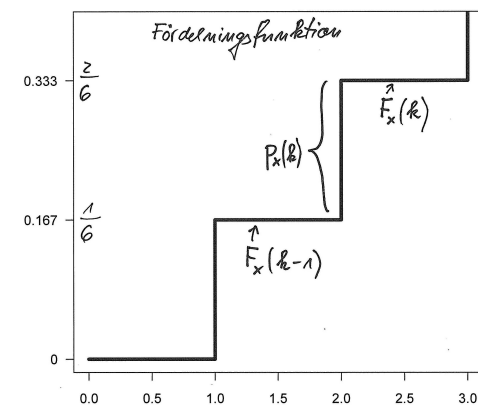


Villkor: $p_X(k) \geq 0 \quad \forall k$ och $\sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) = 1$

Diskreta stokastiska variabler: Fördelningsfunktion

$F_X(x) = P(X \leq x)$ bestämmer fördelningen entydigt:

$$p_X(k) = F_X(k) - F_X(k-1)$$



Egenskaper för fördelningsfunktioner

Sats 3.2

För en fördelningsfunktion $F_X(x)$ gäller:

$$F_X(x) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{då } x \rightarrow -\infty \\ 1 & \text{då } x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$F_X(x)$ är en icke-avtagande funktion av x

$F_X(x)$ är kontinuerlig till höger för varje x

Diskret fördelning: Binomialfördelning

Abstraktion: Låda med (många) säkringar, andel p felaktiga

$P(\text{fel}) = p$ och $P(\text{inget fel}) = 1 - p$ för varje försök

Tar **n stycken**: slh. att jag får precis k felaktiga?

Slumpvariabel X = antalet felaktiga av n : $\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$

$$P_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Diskret fördelning: Binomialfördelning

Exempel: Låda med 1000 säkringar, 50 är felaktiga

$P(\text{fel}) = 0.05$ och $P(\text{inget fel}) = 0.95$ för varje försök

Tar **5 stycken**: slh. att jag får precis 1 felaktig, 2 felaktiga osv.?

Slumpvariabel X = antalet felaktiga av de 5: $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$$P_X(1) = \binom{5}{1} (0.05)^1 (0.95)^4 = 0.203$$

$$P_X(2) = \binom{5}{2} (0.05)^2 (0.95)^3 = 0.021$$

$$P_X(3) = \binom{5}{3} (0.05)^3 (0.95)^2 = 0.00113$$

Binomialfördelning: Förekomst

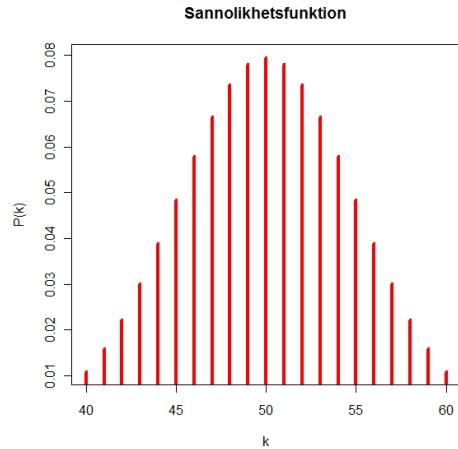
Binomialfördelning: $\text{Bin}(n, p)$

- ▶ Upprepar ett försök **n** gånger
- ▶ Varje enskilt försök kan utfalla på två alternativa sätt (A, B) med sannolikheterna **p** respektive $(1 - p)$
- ▶ Frågan är: Hur stor är slh. att få resultat A exakt **k** gånger?
- ▶ s.v. X : diskret, $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, n\}$

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$0 < p < 1$$

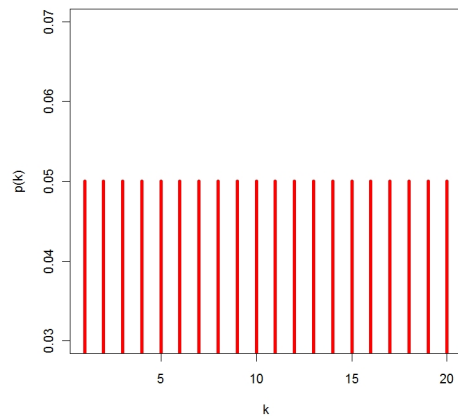
Binomialfördelning: Sannolikhetsfunktion



```
sum(dbinom(0:100, 100, 0.5)) # måste vara ett
x<-40:60
X<-dbinom(x, 100, 0.5)
plot(x,X,type="h",lwd=4,col=2,xlab="k",ylab="P(k)",main="Sannolikhetsfunktion")
```

Likförmig fördelning

$$p_X(k) = \frac{1}{m} \quad k = 1, 2, \dots, m$$



Exempel för binomialfördelning

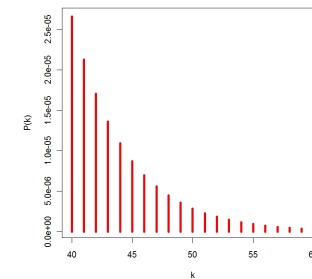
Fler exempel:

- ▶ Antal väljare av totalt 1000 som kommer att rösta på parti A - om det bara finns 2 partier
- ▶ Myntkast: antalet kronor i 10 kast
- ▶ Antal 6:or i 100 tärningskast $p = 1/6$; $(1 - p) = 5/6$
- ▶ Urna med (många!) vita och svarta kulor, slh. att dra k svarta kulor utav n .

Geometrisk fördelning: $X \in Ge(p)$

$$p_X(k) = (1 - p)^k p \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad 0 < p < 1$$

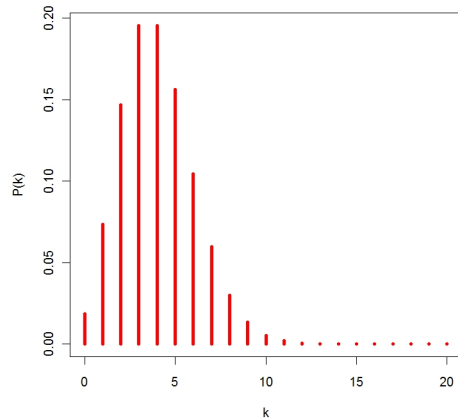
Tärning: Slh. att kasta den första femman i kast $(k + 1)$ $p = 1/6$



Figur: Bernoulli experiment

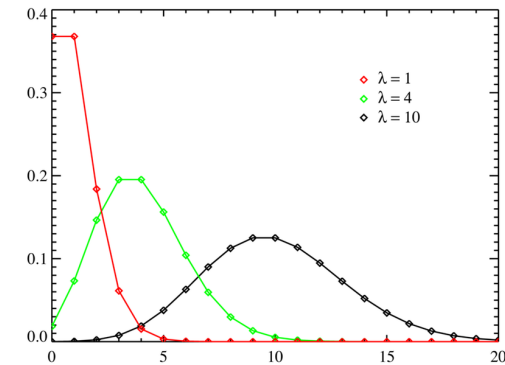
Poissonfördelning: $X \in Po(\mu)$

$$p_X(k) = \frac{\mu!}{k!} e^{-\mu} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \mu > 0$$



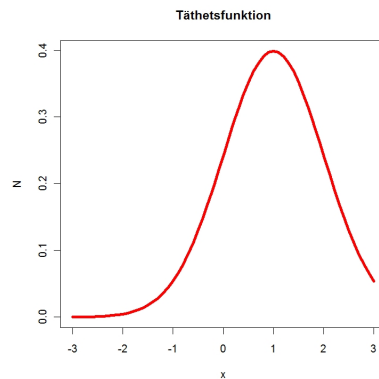
Poissonfördelning: $X \in Po(\mu)$

$$p_X(k) = \frac{\mu!}{k!} e^{-\mu} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \mu > 0$$



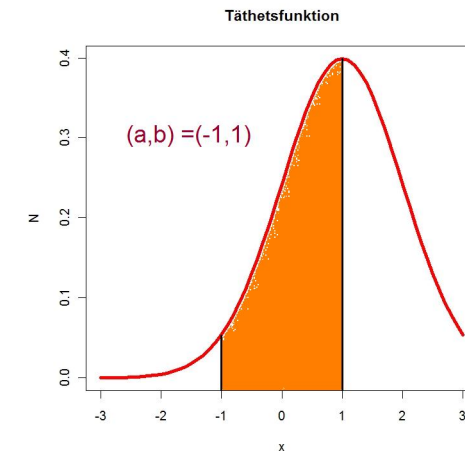
Täthetsfunktion för kontinuerliga slumpvariabler

- kan anta alla reella tal i ett visst intervall, t.ex. $\Omega = \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$
- sannolikhetsmassan 1 läggs ut på reella axeln $\Rightarrow$ täthetsfunktion



Kontinuerliga fördelningar: sannolikhet att utfallet hamnar i intervallet $(a \leq X \leq b)$

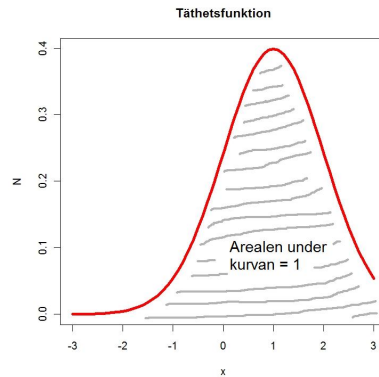
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$



Kontinuerliga fördelningar: Villkor för täthetsfunktionen

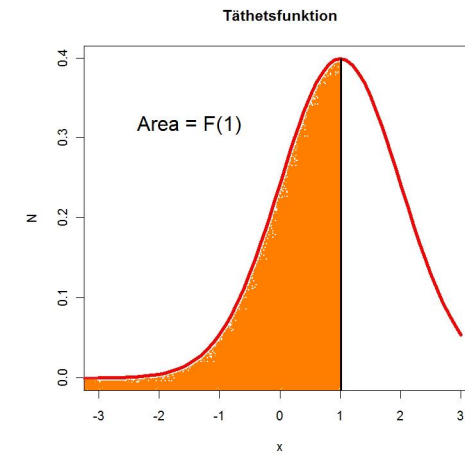
$$f_X(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$$



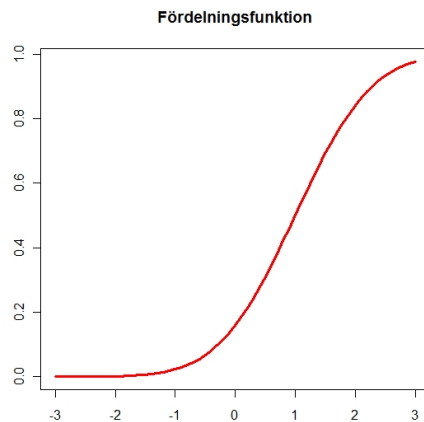
Kontinuerliga fördelningar: Fördelningsfunktion

$$P(-\infty < X \leq x) = P(X \leq x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$



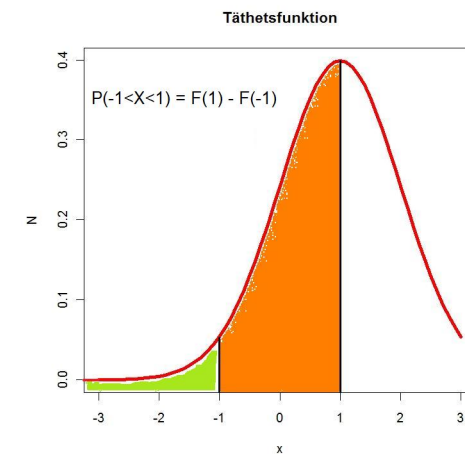
Kontinuerliga fördelningar: Fördelningsfunktion

$$P(-\infty < X \leq x) = P(X \leq x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$



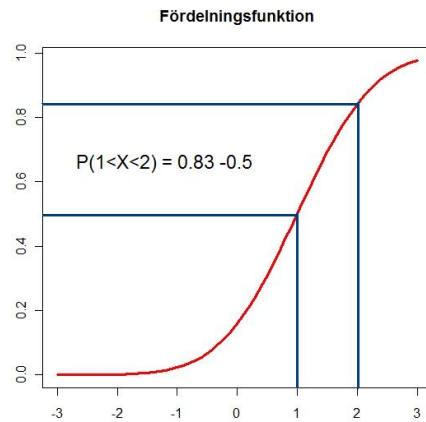
Kontinuerliga fördelningar: Slh. och fördelningsfunktion

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(t) dt = F_X(b) - F_X(a)$$



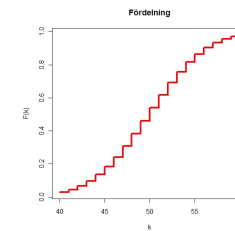
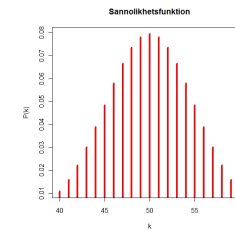
Kontinuerliga fördelningar: Slh. och fördelningsfunktion

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(t) dt = F_X(b) - F_X(a)$$



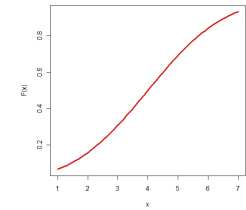
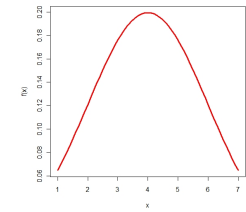
Diskreta slumpvariabler

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{k \leq x} p_X(k)$$



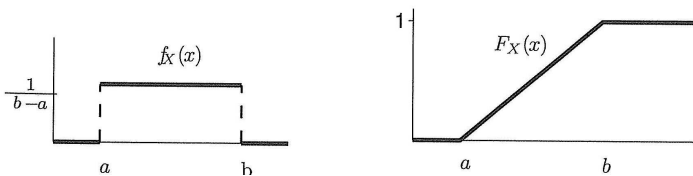
Kontinuerliga slumpvariabler

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$



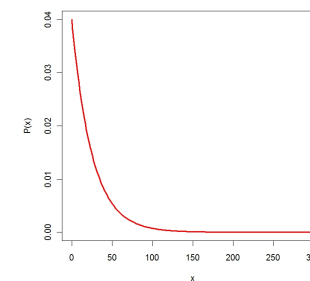
Likförmig kontinuerlig fördelning: $X \in U(a, b)$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{om } a < x < b \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$



Exponentialfördelning: $X \in \text{Exp}(\lambda)$

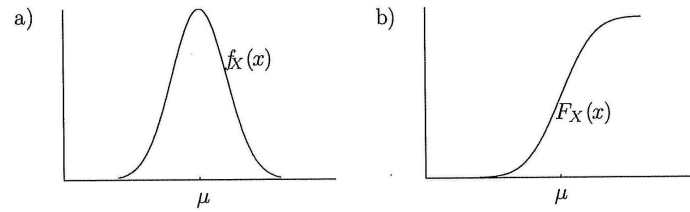
$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{om } x > 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$



Figur: Radioaktivt sönderfall

Normalfördelning: $X \in N(\mu, \sigma)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad -\infty < x < \infty$$



Figur: Normalfördelning